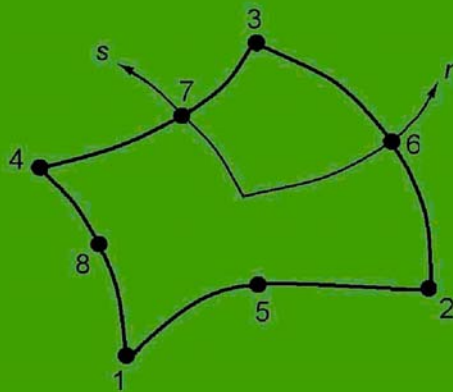


MIRCEA RADEȘ

ANALIZA CU ELEMENTE FINITE



MIRCEA RADEȘ

**ANALIZA CU
ELEMENTE FINITE**

2006

Prefață

Lucrarea este o traducere a cursului *Finite Element Analysis* predat studenților anului III al Facultății de Inginerie în Limbi Străine, Filiera Engleză, la Universitatea Politehnică București, începând cu anul 1992.

Conținutul cursului s-a lărgit în timp, fiind predat din 1992 și studenților de la facultatea de Transporturi, favorizat de apariția rețelelor de calculatoare și de includerea sa în planul de învățământ al facultăților cu profil mecanic. Programa cursului, care prevede 28 ore de curs și 28 ore de seminar/laborator, a fost structurată în conformitate cu recomandările NAFEMS publicate în numărul din Octombrie 1988 al revistei *BENCHmark*. Cursul reprezintă doar o *introducere* în analiza cu elemente finite, pentru care am scris programe simple, cu un singur tip de element finit, care să fie utilizate de studenți la rezolvarea unor teme de casă. Nu se tratează învelișuri și elemente tridimensionale. În anul III, planul de învățământ de la F.I.L.S. conține cursul *Computational Structural Mechanics*, la care studenții aprofundează modelarea cu elemente finite și utilizează un program de firmă.

La structurarea cursului am avut în vedere necesitatea formării unor studenți capabili: a) să înțeleagă baza teoretică, b) să deslușească structura programelor cu elemente finite pentru eventuale corecții și dezvoltări, c) să ruleze programe și să recunoască limitele acestora, d) să poată verifica rezultatele și e) să înțeleagă mesajele de eroare și să găsească modalități de corectare a erorilor.

Programa cursului a fost limitată la structuri elastice liniare bidimensionale. S-a considerat potrivit să se prezinte analiza cu elemente finite în două etape: întâi procesul de asamblare fără nici o aproximare (aplicat la grinzi cu zăbrele), apoi modelarea cu elemente finite, care presupune aproximarea câmpului de deplasări, de la triunghiul cu deformații specifice constante la elemente patrulatere izoparametrice, incluzând integrarea numerică. S-a urmărit ca studenții să dobândească: a) familiaritate cu metodele matriciale și calculul matricilor de rigiditate; b) înțelegerea utilității coordonatelor locale și globale; c) abilitatea folosirii principiului energiei potențiale minime și a principiului lucrului mecanic virtual; d) trecerea de la coordonate naturale la coordonate fizice și necesitatea integrării numerice; e) o vedere de ansamblu asupra rezolvării sistemelor algebrice liniare (eliminarea Gauss, metoda frontală etc.) și f) utilizarea celor patru tipuri de ecuații – echilibru, compatibilitate, constitutive și condiții la limită.

În cursul original, predat unor studenți a căror limbă maternă nu este limba engleză, au fost reproduse expresii și fraze din cărți și articole scrise de vorbitori nativi ai acestei limbi. Această traducere este o încercare de introducere a terminologiei corecte a *Analizei cu elemente finite* în limba română.

Mircea Radeș

Cuprins

Prefață	i
Cuprins	iii
1. Introducere	1
1.1 Obiectul A.E.F.	1
1.2 Metoda deplasărilor în analiza cu elemente finite	3
1.3 Istoric	4
1.4 Etapele A.E.F.	5
2. Metoda deplasărilor	9
2.1 Ecuațiile de echilibru	9
2.2 Condițiile de compatibilitate geometrică	10
2.3 Relațiile forță/alungire	11
2.4 Condițiile la limită	12
2.5 Rezolvarea în funcție de deplasări	12
2.6 Comparație între metoda forțelor și metoda deplasărilor	13
3. Metoda rigidităților	17
3.1 Matricea de rigiditate a unui element de bară	17
3.2 Transformarea din coordonate locale în coordonate globale	19
3.2.1 Transformarea coordonatelor	19
3.2.2 Transformarea forțelor	20
3.2.3 Matricea de rigiditate a unui element în coordonate globale	21
3.2.4 Proprietăți ale matricii de rigiditate a unui element	22
3.3 Modelul lui Link	25
3.4 Metoda asamblării directe	26
3.5 Compatibilitatea deplasărilor nodale	28
3.6 Matricea de rigiditate expandată a unui element	29
3.7 Matricea de rigiditate globală neredusă	30

3.8	Ecuțiile de echilibru ale forțelor la noduri	31
3.9	Matricea de rigiditate globală redusă	33
3.10	Reacțiunile și forțele interioare	35
3.11	Sarcini și tensiuni termice	36
3.12	Numerotarea nodurilor	37
	Probleme	41
4.	Bare și arbori	47
4.1	Elemente de bară în plan	47
4.1.1	Ecuția diferențială de echilibru	47
4.1.2	Coordonate și funcții de formă pentru elementul <i>truss</i>	48
4.1.3	Bara fără sarcini între capete	49
4.1.4	Matricea de rigiditate a unui element în coordonate locale	51
4.1.5	Bara cu sarcini între capete	52
4.1.6	Vectorul forțelor nodale ale unui element	55
4.1.7	Asamblarea matricii de rigiditate și a vectorului forțelor globale	56
4.1.8	Efectul pretensionării	59
4.2	Elemente plane de arbore	60
	Exemple	62
5.	Grinzi, cadre și grilaje	79
5.1	Discretizarea cu elemente finite	79
5.2	Analiza statică a unei grinzi cu secțiunea constantă	81
5.3	Grinda fără sarcini între capete	83
5.3.1	Funcțiile de formă	84
5.3.2	Matricea de rigiditate a unui element de grindă	86
5.3.3	Semnificația fizică a elementelor matricii de rigiditate	88
5.4	Grinda cu sarcină distribuită între capete	89
5.4.1	Vectorul coerent al forțelor nodale	89
5.4.2	Funcții de interpolare de grad superior	92
5.4.3	Momentul încovoietor și forța tăietoare	95
5.5	Condiții de convergență minimale	96
5.6	Elementul de cadru plan	97
5.6.1	Eforturi axiale	97
5.6.2	Matricea de rigiditate și vectorul forțelor în coordonate locale	98

5.6.3 Transformarea coordonatelor	98
5.6.4 Matricea de rigiditate și vectorul forțelor în coordonate globale	100
5.7 Asamblarea matricii de rigiditate globale	100
5.8 Grilaje	111
5.9 Elementul de grindă cu forfecare	116
5.9.1 Analiza unei grinzi cu lunecări specifice constante pe grosime	117
5.9.2 Funcțiile de formă	118
5.9.3 Matricea de rigiditate	121
6. Elemente de elasticitate liniară	123
6.1 Notăția matricială pentru sarcini, tensiuni și deformații specifice	123
6.2 Ecuațiile de echilibru în volumul V	125
6.3 Ecuațiile de echilibru pe suprafața S_σ	126
6.4 Relațiile între deformații specifice și deplasări	127
6.5 Relațiile între tensiuni și deformații specifice	128
6.6 Efecte termice	130
6.7 Energia de deformație	130
7. Metode energetice	131
7.1 Principiul lucrului mecanic virtual (PLMV)	131
7.1.1 Deplasările virtuale	131
7.1.2 Lucrul mecanic virtual al sarcinilor exterioare	133
7.1.3 Lucrul mecanic virtual al forțelor interioare	133
7.1.4 Principiul deplasărilor virtuale	134
7.1.5 Proba că PDV este echivalent cu ecuațiile de echilibru	137
7.2 Principiul minimului energiei potențiale totale	139
7.2.1 Energia de deformație	139
7.2.2 Energia potențială exterioară	140
7.2.3 Energia potențială totală	140
7.3 Metoda Rayleigh-Ritz	143
7.4 M.E.F. – o versiune localizată a metodei Rayleigh-Ritz	148
7.4.1 M.E.F. în Mecanica structurilor	148
7.4.2 Discretizarea	149
7.4.3 Principiul deplasărilor virtuale	149

7.4.4	Funcțiile de aproximare pentru un element	149
7.4.5	Compatibilitatea între deformații specifice și deplasări	150
7.4.6	Matricea de rigiditate și vectorul forțelor unui element	151
7.4.7	Asamblarea matricii de rigiditate globale și a vectorului global al forțelor	151
7.4.8	Rezolvarea ecuațiilor de echilibru și calculul tensiunilor	152
8	Elemente bidimensionale	153
8.1	Triunghiul cu deformații specifice constante	153
8.1.1	Discretizarea structurii	153
8.1.2	Aproximarea polinomială a câmpului de deplasări	154
8.1.3	Aproximarea nodală a câmpului de deplasări	155
8.1.4	Matricea $[B]$	158
8.1.5	Matricea de rigiditate a elementului și vectorul forțelor	159
8.1.6	Considerații generale	160
8.2	Elemente dreptunghiulare	176
8.2.1	Dreptunghiul cu patru noduri (liniar)	176
8.2.2	Dreptunghiul cu opt noduri (pătratic)	178
8.3	Elemente triunghiulare	180
8.3.1	Coordonate de arie	180
8.3.2	Triunghiul cu deformații specifice liniare	182
8.3.3	Triunghiul cu deformații specifice pătratice	185
8.4	Echilibru, convergență și compatibilitate	187
8.4.1	Echilibru și compatibilitate	187
8.4.2	Convergență și compatibilitate	188
9	Elemente isoparametrice	191
9.1	Elementul patrulater liniar	191
9.1.1	Coordonate naturale	192
9.1.2	Funcțiile de formă	193
9.1.3	Câmpul deplasărilor	194
9.1.4	Transformarea din coordonate naturale în coordonate carteziane	195
9.1.5	Matricea de rigiditate a unui element	198
9.1.6	Vectorul forțelor nodale ale unui element	199
9.2	Integrarea numerică	200

9.2.1 Integrarea Gauss unidimensională	200
9.2.2 Integrarea Gauss în două dimensiuni	203
9.2.3 Integrala din matricea de rigiditate	204
9.2.4 Calculul tensiunilor	207
9.3 Elementul patrulater cu opt noduri	208
9.3.1 Funcțiile de formă	209
9.3.2 Derivatele funcțiilor de formă	210
9.3.3 Determinantul matricii jacobiene	211
9.3.4 Matricea de rigiditate a unui element	211
9.3.5 Calculul tensiunilor	213
9.3.6 Forțele nodale coerente	214
9.4 Elementul patrulater cu nouă noduri	219
9.5 Elementul triunghiular cu șase noduri	221
9.6 Singularitatea matricii jacobiene	223
10 Elemente de placă încovoiată	225
10.1 Teoria plăcilor subțiri (Kirchhoff)	225
10.2 Teoria plăcilor Reissner-Mindlin	229
10.3 Elemente de placă încovoiată dreptunghiulare	232
10.3.1 Elementul ACM (neconform)	232
10.3.2 Elementul BFS (conform)	238
10.3.3 Elementul HTK	239
10.4 Elemente de placă încovoiată triunghiulare	244
10.4.1 Element triangular subțire (neconform)	245
10.4.2 Elementul THT (conform)	248
10.4.3 Triunghiuri cu constrângeri Kirchhoff discrete (DKT)	250
Bibliografie	257
Index	265

1.

INTRODUCERE

Analiza cu elemente finite (A.E.F.) aplicată structurilor este o metodă multidisciplinară, bazată pe cunoștințe din trei domenii: 1) *Mecanica structurilor*, incluzând teoria elasticității, rezistența materialelor, teoria plasticității, dinamica structurilor etc, 2) *Analiza numerică*, incluzând metode aproximative, rezolvarea sistemelor de ecuații algebrice liniare, probleme de valori proprii, etc, și 3) *Știința aplicată a calculatoarelor*, care se ocupă cu dezvoltarea și implementarea unor programe mari de calculator.

A.E.F. este utilizată pentru rezolvarea unor *probleme* analitice de mari dimensiuni. *Obiectivul* acesteia este modelarea și descrierea comportării mecanice a structurilor cu geometrie complexă. *Metoda* este un procedeu de discretizare: forma geometrică și câmpurile deplasărilor, deformațiilor specifice și tensiunilor sunt descrise prin cantități discrete (de ex. coordonate) distribuite în toată structura. Aceasta impune o *notație* matricială. *Uneltele* sunt calculatoarele numerice, capabile să memoreze liste lungi de numere și să le prelucreze.

1.1 Obiectul A.E.F.

Obiectul A.E.F. este înlocuirea sistemului cu număr infinit de grade de libertate întâlnit în aplicațiile referitoare la continuum printr-un sistem finit care posedă aceeași bază într-o analiză discretă.

Scopul este găsirea unei soluții aproximative la o *problemă cu condiții la limită bilocale* sau *cu parametri inițiali* prin împărțirea domeniului sistemului în mai multe subdomenii de dimensiuni finite, interconectate între ele, având dimensiuni și forme diferite, și prin definirea variabilelor de stare necunoscute, printr-o combinație liniară de funcții de aproximare. Subdomeniile se numesc *elemente finite*, totalitatea elementelor finite formează o *rețea (mesh)* iar funcțiile de aproximare se numesc *funcții de interpolare*. Impunând compatibilitatea funcțiilor definite individual pe fiecare subdomeniu în anumite puncte numite *noduri*, funcția necunoscută este aproximată pe întregul domeniu.

Principala diferență între A.E.F. și alte metode aproximative pentru rezolvarea problemelor cu condiții la limită (diferențe finite, reziduuri ponderate, Rayleigh-Ritz, Galerkin) constă în faptul că în A.E.F. aproximarea se face pe subdomenii relativ mici.

A.E.F. este o versiune localizată a metodei Rayleigh-Ritz. În loc să se găsească o funcție admisibilă care să satisfacă condițiile la limită pe întregul domeniu, ceea ce adesea este dificil, dacă nu imposibil, în A.E.F. funcțiile admisibile (numite *funcții de formă*) se definesc pe domeniul unor elemente cu geometrie simplă și nu țin cont de complicațiile de la frontiere.

Deoarece întregul domeniu este divizat în mai multe *elemente* și funcția este aproximată prin (în funcție de) valorile ei la *nodurile* elementelor, evaluarea unei astfel de funcții necesită rezolvarea unor ecuații algebrice simultane. Acest lucru este posibil doar cu ajutorul calculatoarelor. Succesul incontestabil al metodei elementelor finite trebuie atribuit în mare măsură apariției acesteia la momentul potrivit. Dezvoltarea metodei elementelor finite s-a făcut în paralel cu cea a calculatoarelor numerice de mare capacitate, ceea ce a condus la automatizare. Calculatoarele sunt capabile nu numai să rezolve ecuațiile de echilibru discretizate, ci și să ajute la formularea ecuațiilor, prin decizii privind rafinarea rețelei de discretizare, și la asamblarea matricilor de rigiditate.

Dar cel mai important este că metoda elementelor finite poate fi aplicată unor sisteme cu geometrie complexă și distribuții complicate ale parametrilor. Larga utilizare a metodei clasice Rayleigh-Ritz a fost limitată de imposibilitatea generării unor funcții admisibile adecvate pentru un mare număr de probleme practice. Într-adevăr, sistemele cu condiții la limită complexe sau cu geometrie complicată nu pot fi descrise adecvat prin funcții admisibile globale, definite pe întregul domeniu, care tind să aibă expresii complicate, dificil de utilizat în mod sistematic. În schimb, în A.E.F. se construiește o soluție aproximativă pe baza unor funcții admisibile locale, definite pe subdomenii mici ale structurii. Pentru a descrie un contur neregulat sau o distribuție neuniformă a unor parametri, A.E.F. poate modifica nu numai dimensiunea elementelor finite ci și forma acestora. Această versatilitate extremă, combinată cu dezvoltarea unor programe de calculator performante bazate pe această metodă, unele distribuite gratuit ca sursă deschisă (*open source*), au făcut ca A.E.F. să fie adoptată ca metoda preferată pentru analiza structurilor.

În A.E.F., ecuațiile de echilibru se obțin din principii variaționale care implică staționaritatea funcționalei definite de energia potențială totală. În timp ce rezolvarea ecuațiilor diferențiale cu condiții la limită complicate este dificilă, integrarea, chiar aproximativă, a unor funcții polinomiale este mai facilă. Din punct de vedere matematic, a rezolva $[A]\{x\}=\{b\}$ este echivalent cu a minimiza

$$P(x) = \frac{1}{2} \{x\}^T [A] \{x\} - \{x\}^T \{b\}.$$
 Aceasta este esența A.E.F. aplicată structurilor [101].

1.2 Metoda deplasărilor în analiza cu elemente finite

În modelarea cu elemente finite, o structură este discretizată (ipotetic) în *elemente finite*. Pe conturul și în interiorul acestora se definesc puncte numite *noduri*. Deplasările nodurilor se aleg ca variabile discrete primare. Deplasările în interiorul elementelor se exprimă în funcție de *deplasările nodale* prin funcții de interpolare denumite *funcții de formă*. Elementele finite sunt atât de mici încât *forma* câmpului de deplasări poate fi aproximată cu eroare relativ mică, urmând a se determina doar *intensitatea* acestuia. “Formele” sunt polinoame, putând fi utilizate și funcții trigonometrice.

Elementele sunt asamblate astfel încât deplasările să fie continue (într-un anumit fel) la traversarea frontierei, tensiunile interne să fie în echilibru cu sarcinile aplicate și condițiile la limită să fie satisfăcute. În final, ecuațiile de echilibru sunt generate printr-o metodă variațională.

Prima parte a procesului de modelare cu elemente finite constă în alegerea unor elemente corecte și adecvate, înțelegerea “*pedigree-ului*” acestora și interpretarea rezultatelor incorecte generate de utilizarea unor elemente nepotrivite. Partea a doua a procesului constă în asamblarea elementelor și rezolvarea ecuațiilor de echilibru a structurii. Aceasta implică recunoașterea mesajelor de eroare, când acest proces este întrerupt, sau când devine inefficient datorită modelării necorespunzătoare a structurii.

În A.E.F. se parcurg următoarele șase etape principale: 1) discretizarea continuumului; 2) alegerea funcțiilor de interpolare; 3) definirea proprietăților elementelor; 4) asamblarea proprietăților elementelor; 5) rezolvarea sistemului de ecuații și 6) retrocalculul pentru determinarea unor mărimi suplimentare.

Principalele surse de aproximare sunt: 1) definirea domeniului (fizică sau geometrică); 2) discretizarea domeniului (tăierea colțurilor, înlocuirea liniilor curbe cu linii drepte și a elementelor curbe cu elemente plane), și 3) algoritmi de rezolvare a ecuațiilor. Modelarea îmbinărilor și a contactului între părțile componente ale unei structuri, și modelarea amortizării în probleme dinamice, sunt cele mai dificile. Rafinarea rețelelor (și generarea automată a acestora) nu conduce neapărat la o creștere a preciziei calculelor. O rețea mai fină conduce la matrici de rigiditate mai mari, la un număr mai mare de ecuații de rezolvat, deci necesită o memorie mai mare a calculatorului și un timp mai lung de rezolvare.

Printre motivele pentru care A.E.F. a căpătat o acceptare atât de largă se numără: 1) alegerea facilă a funcțiilor de formă, 2) ușurința generării matricilor de rigiditate (și a vectorilor forțelor nodale), prin simpla asamblare a unor matrici specifice fiecărui element și 3) versatilitatea. Dezvoltată inițial ca o metodă pentru analiza tensiunilor în structuri aeronautice, A.E.F. a evoluat într-o metodă care poate fi aplicată unui număr mare de probleme inginerești liniare și neliniare, statice, de stabilitate și dinamice.

1.3 Istoric

Ideea reprezentării unui domeniu dat prin elemente discrete a apărut înaintea metodei elementelor finite. În antichitate, matematicienii au estimat valoarea numărului π aproximând circumferința unui cerc prin perimetrul unui poligon regulat înscris în cerc. Recent, ideea a găsit aplicații în analiza structurii avioanelor, unde aripile și fuselajele sunt tratate ca ansambluri de longeroane, lise, panouri, nervuri și elemente de rigidizare.

Aproximarea unei funcții necunoscute printr-o funcție continuă definită diferit pe subdomenii a fost utilizată încă din 1943 de Courant în studiul problemei torsiunii (Saint-Venant), împărțind secțiunea unei bare în elemente triunghiulare mici și folosind principiul minimului energiei potențiale totale. Motivul pentru care articolul lui Courant nu a atras atenția poate fi atribuit apariției acestuia într-un moment nepotrivit. La începutul anilor 1940 nu existau calculatoare capabile să rezolve sisteme mari de ecuații, astfel că metoda a apărut a fi nepractică.

Baza teoretică a A.E.F. o reprezintă metodele energetice din Mecanica structurilor și metodele aproximative de calcul. Primele teoreme energetice au fost formulate de Maxwell (1864) și Castigliano (1875). Metodele aproximative au fost dezvoltate de Rayleigh (1877), Ritz (1908) și Galerkin (1915). Prima carte despre metoda deformațiilor a fost publicată de Ostenfeld (1926).

După cel de-al doilea război mondial, *Metoda forțelor* (metoda flexibilității) a fost promovată de Levy (1947) și Garvey (1951) iar *Metoda matricială a deplasărilor* (metoda rigidității) a fost utilizată de Levy (1953) în analiza aripii săgeată a avioanelor. Turner a formulat și perfecționat *Metoda directă a rigidității* la Boeing (1959). Dezvoltarea Metodei forțelor a încetat în 1969.

Dezvoltarea aripilor delta ale avioanelor a revigorat interesul pentru metoda rigidităților. Modelarea acestora necesită elemente de panou bidimensionale cu geometrie arbitrară. După o primă încercare făcută de Levy (1953) cu elemente triunghiulare, într-o serie de articole publicate de Argyris în patru numere ale revistei *Aircraft Engineering* (1954, 1955), colectate apoi într-o carte de Argyris și Kelsey (1960), se prezintă dezvoltarea matricii de rigiditate a unui panou dreptunghiular plan utilizând funcții de interpolare biliniare ale deplasărilor. S-a constatat însă că elementele dreptunghiulare nu sunt adecvate pentru modelarea aripilor delta.

Prezentarea formală a metodei elementelor finite este atribuită lui Turner, Clough, Martin și Topp (1956), care în perioada 1952-1953 au reușit să calculeze direct rigiditatea unui panou triunghiular la Boeing. Termenul “element finit” a fost utilizat pentru prima dată de Clough (1960).

Prima carte dedicată A.E.F. a fost scrisă de Zienkiewicz și Cheung (1967), urmată de cărțile lui Przemieniecki (1968) și Gallagher (1973). Articole importante au fost publicate de Fraeijs de Veubeke (1964), Argyris (1965), Irons și

colaboratorii (1964, 1966, 1970). Cercetări în domeniu s-au făcut cu deosebire la Civil Engineering Department, Berkeley, conduse de Clough, la Washington University, conduse de Martin, și la Swansea University, sub conducerea lui Zienkiewicz. Începând din 1963, programele de calculator bazate pe metoda elementelor finite au fost răspândite gratuit în afara comunității aerospațiale.

Contribuții majore au adus B. M. Irons, care a inventat elementele izoparametrice, funcțiile de formă, algoritmi de rezolvare frontală a ecuațiilor liniare și testul “peticului” (1964-1980), R. J. Melosh, care a sistematizat calculul pe baze variaționale al matricilor de rigiditate și a recunoscut că A.E.F. este o metodă Rayleigh-Ritz aplicată pe elemente de mici dimensiuni (1963), J. S. Archer, care a introdus conceptul de matrice de masă coerentă (1963), și E. L. Wilson, care a studiat metode de asamblare a matricilor rare și de rezolvare a sistemelor liniare aferente (1963), a dezvoltat algoritmul de condensare statică (1974) precum și trei programe de calculator *SAP* (prima sursă gratuită de software în A.E.F.). Mai târziu i s-a alăturat K.-J. Bathe împreună cu care a dezvoltat programele *SAP4* (1973), *SAP5* și *NONSAP*.

Începând din 1965 sistemul de analiză cu elemente finite *NASTRAN* a fost dezvoltat de COSMIC, MacNeal Schwendler, Martin Baltimore și Bell Aero Systems sub contract cu NASA, completat în 1968 și revizuit prima dată în 1972. Alte programe cu elemente finite sunt *ANSYS*, dezvoltat de Swanson Analysis Systems (1970), *STRUDL* - de Civil Engineering Department la Massachusetts Institute of Technology și McDonnell Douglas Automation Company (1967), *STARDYNE* - de Mechanics Research Inc, *ADINA* - dezvoltat de K.-J. Bathe la M.I.T. (1975), *SESAM* - de către Det Norske Veritas, *NISA* - de Engineering Mechanics Research Corporation, *MARC* - de Marc Analysis Research Corporation, *ABAQUS* - de Hibbitt, Karlsson & Sorensen, Inc. (1978), *COSMOS-M* - de Structural Research & Analysis Corp. (1985), *SAMCEF* - de SAMTECH (1965), *IDEAS-MS*, *PATRAN*, *ALGOR* etc.

Programele de uz general permit analize dinamice, incluzând calculul frecvențelor proprii, analiza răspunsului liniar și neliniar, răspunsul la șoc, calculul stabilității statice și dinamice, precum și calculul la solicitări termice. După 1967 A.E.F. a fost aplicată cu succes la rezolvarea problemelor de mecanica fluidelor, câmpuri electromagnetice și transfer de căldură.

1.4 Etapele A.E.F.

A.E.F. implică trei etape distincte: 1) preprocesarea, 2) procesarea și 3) postprocesarea datelor.

Preprocesarea include introducerea și pregătirea datelor, coordonatele nodale, conectivitatea elementelor, condițiile la limită, proprietățile materialelor și încărcările. Introducerea datelor se poate face fie interactiv, printr-o interfață *user-*

friendly, sau prin citire dintr-un fișier de date. Unele date de intrare pot fi importate din alte programe C.A.D. sau de A.E.F.

Generarea automată a rețelei de discretizare poate fi utilizată pentru definirea coordonatelor nodale, numerotarea optimă a nodurilor și definirea conectivității elementelor. Afișarea desenului rețelei este un mod util și simplu de verificare a datelor de intrare. În acest fel se pot pune în evidență nodurile amplasate incorect sau blocarea greșită a nodurilor de pe contur.

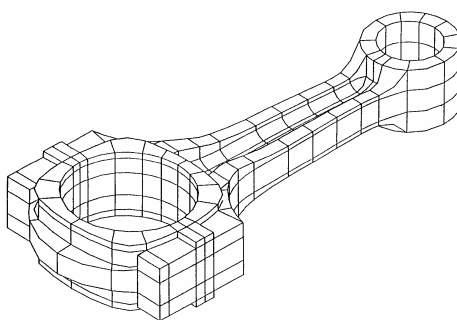


Fig. 1.1

Două rețele de discretizare tridimensionale, obținute cu programul *SIMPAT* dezvoltat de I.T.I.Italia, reprezentate cu afișarea doar a liniilor vizibile, sunt date în figura 1.1, pentru o bielă și în figura 1.2, pentru un piston de motor de automobil.

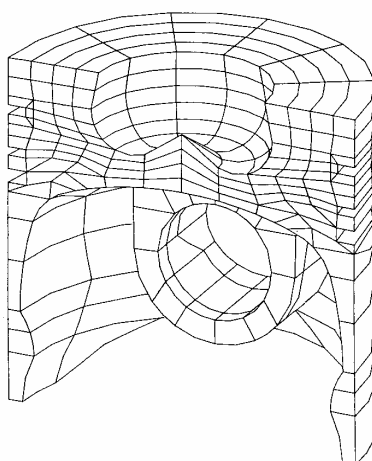


Fig. 1.2

Modelul cu elemente finite al cadrului cabinei unui autoturism, obținut cu programul *MSC/NASTRAN*, este arătat în figura 1.3.

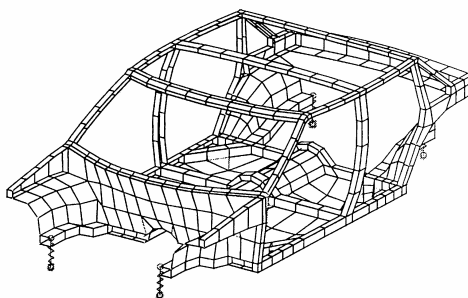


Fig. 1.3

În etapa de *procesare*, programul cu elemente finite prelucrează datele de intrare și calculează mai întâi variabilele nodale, cum sunt deplasările și temperaturile (rezolvarea ecuațiilor), apoi mărimi ca tensiunile și derivatele variabilelor primare (retrocalculul).

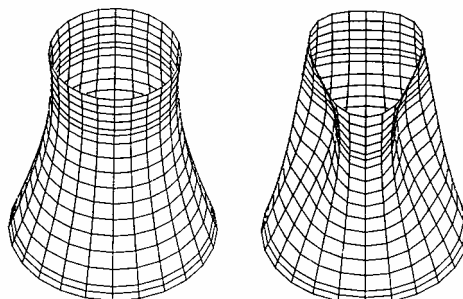


Fig. 1.4

În analizele dinamice, procesarea include rezolvarea unei probleme de valori proprii sau determinarea răspunsului tranzitoriu prin metode incrementale. Costul analizei dinamice, măsurat în funcție de resursele calculatorului, crește cu puterea a treia a dimensiunii problemei. În analizele statice, costul rezolvării sistemului de ecuații algebrice liniare crește doar liniar cu dimensiunile problemei. În principiu, în analize dinamice pare a fi convenabilă utilizarea aceluiași model cu elemente finite ca cel construit pentru analiza statică. Totuși adesea modelul static conține mai multe detalii decât sunt necesare în analiza dinamică, astfel că se face apel la *condensare* sau *substructurare dinamică* pentru a reduce ordinul problemei dinamice înaintea etapei de procesare.

Postprocesarea se ocupă cu prezentarea rezultatelor. Programele de calcul mai vechi utilizau listarea tabelară. Majoritatea programelor actuale reprezintă grafic configurația deformată, formele modurilor proprii de vibrație și distribuția tensiunilor. Figura 1.4 arată rețeaua inițială și forma deformată a unui turn de răcire sub acțiunea vântului, obținute utilizând programul *ALGOR SUPERSAP*.

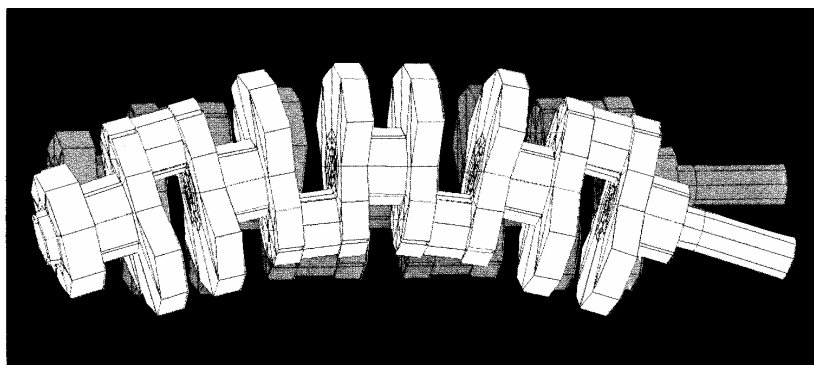


Fig. 1.5

Variabilele nodale scalare, cum sunt temperaturile și presiunile, se prezintă sub formă de linii contur de parametru constant, ca izotermele și izobarele.

Programe cu elemente finite mai recente oferă reprezentări animate ale configurației deformate, ca cea din figura 1.5 pentru un arbore cotit.

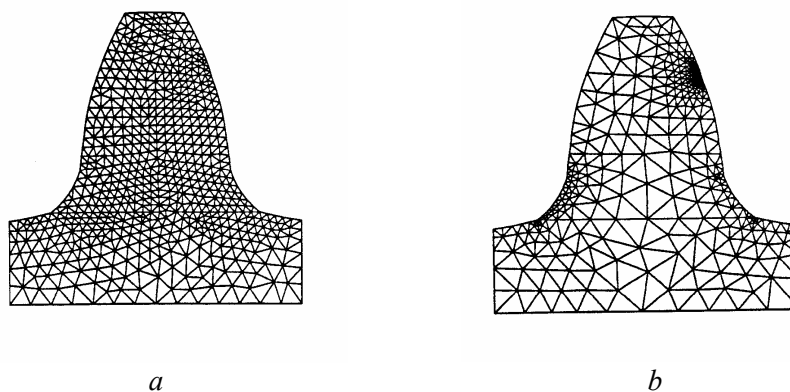


Fig. 1.6

Figura 1.6, *a* prezintă rețeaua inițială bidimensională pentru analiza unui dinte de roată dințată, constând din 1174 elemente triunghiulare cu 6 noduri. Figura 1.6, *b* arată rețeaua optimizată obținută cu postprocesorul *ESTEREF*, constând din numai 814 elemente și care a condus la o eroare de discretizare globală de patru ori mai mică.

2.

METODA DEPLASĂRILOR

La rezolvarea problemelor static nedeterminate trebuie utilizate patru tipuri de relații: ecuații de echilibru, relații între deformații specifice și deplasări, relații între tensiuni și deformații specifice, și condiții la limită. Pentru a ilustra metoda analitică uzuală, se va utiliza un sistem de trei bare articulate. Variabilele care intervin în calcule sunt reacțiunile și forțele interioare din bare, deplasările capetelor barelor și alungirile acestora. Dacă se elimină forțele și alungirile, și primele variabile calculate sunt deplasările articulațiilor, atunci procedeul este denumit *metoda deplasărilor*. El este aplicabil dacă structura este static determinată sau nu. După determinarea deplasărilor, acestea sunt înlocuite în ecuațiile de compatibilitate pentru a obține alungirile, deci deformațiile specifice, apoi se calculează tensiunile din relațiile între tensiuni și deformații specifice.

2.1 Ecuațiile de echilibru

La sistemul din figura 2.1 [74] se presupune că toate barele sunt sollicitate la întindere și se scriu ecuațiile de echilibru pentru fiecare articulație. Se notează T_1, T_2, T_3 forțele în bare și F_1, F_2, F_4, F_5 – reacțiunile în reazeme.

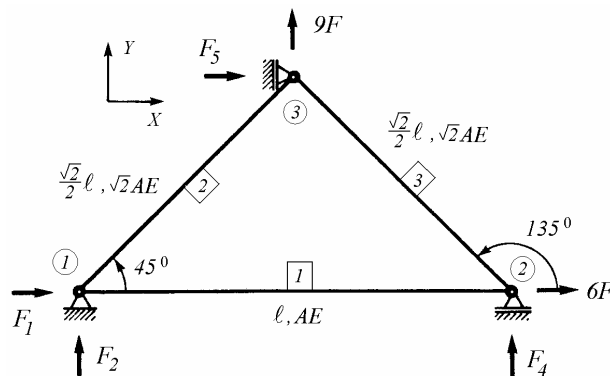


Fig. 2.1

Pentru *Nodul 1* (fig. 2.2, a), ecuațiile de echilibru pe orizontală și pe verticală sunt

$$\begin{aligned} T_1 + T_2 \sqrt{2}/2 + F_1 &= 0, \\ T_2 \sqrt{2}/2 + F_2 &= 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

La *Nodul 2* (fig. 2.2, b), ecuațiile de echilibru se scriu

$$\begin{aligned} 6F - T_1 - T_3 \sqrt{2}/2 &= 0, \\ T_3 \sqrt{2}/2 + F_4 &= 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

În *Nodul 3* (fig. 2.2, c)

$$\begin{aligned} T_3 \sqrt{2}/2 + F_5 - T_2 \sqrt{2}/2 &= 0, \\ 9F - T_2 \sqrt{2}/2 - T_3 \sqrt{2}/2 &= 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Cele șase ecuații (2.1) – (2.3) conțin șapte necunoscute. Sistemul este static nedeterminat. Rezolvarea nu este posibilă folosind doar ecuațiile de echilibru, trebuie utilizate și condițiile de deformație.

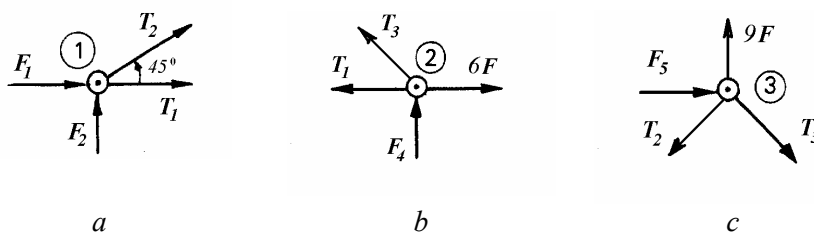


Fig. 2.2

2.2 Condițiile de compatibilitate geometrică

Ecuațiile de compatibilitate exprimă alungirile barelor $\Delta \ell$ în funcție de deplasările capetelor.

Se consideră o bară articulată la capete 1-2, fig. 2.3, înclinată cu unghiul θ față de axa X a sistemului de coordonate globale.

Deplasările în sistemul de coordonate locale xOy pot fi exprimate în funcție de deplasările în sistemul de coordonate globale sub forma

$$\begin{aligned} u_1 &= U_1 \cos \theta + V_1 \sin \theta, \\ u_2 &= U_2 \cos \theta + V_2 \sin \theta. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Alungirea barei este

$$\Delta l = u_2 - u_1 = (U_2 - U_1) \cos \theta + (V_2 - V_1) \sin \theta. \quad (2.5)$$

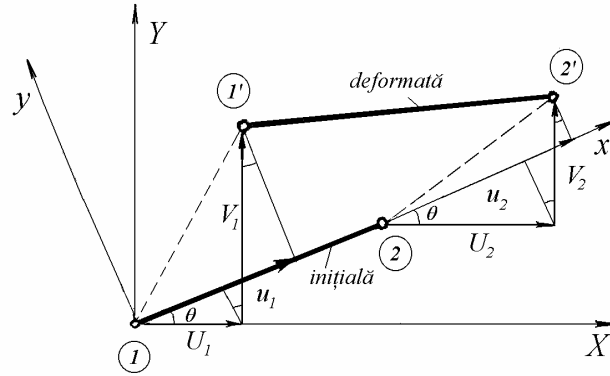


Fig. 2.3

Scriind relația (2.5) pentru fiecare bară a sistemului considerat, se obține

$$\Delta l_{12} = U_2 - U_1, \quad (2.6)$$

$$\Delta l_{13} = (U_3 - U_1) \frac{\sqrt{2}}{2} + (V_3 - V_1) \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad (2.7)$$

$$\Delta l_{23} = (U_3 - U_2) \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) + (V_3 - V_2) \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad (2.8)$$

Cele trei ecuații (2.6) – (2.8) conțin nouă necunoscute, șase deplasări și trei alungiri. Deci avem 9 ecuații cu 16 necunoscute.

2.3 Relațiile forță/alungire

Barele articulate la capete sunt fie întinse, fie comprimate. Utilizând legea lui Hooke pentru solicitări uniaxiale, relațiile forță/alungire se scriu

$$\Delta l_{12} = \frac{T_1 \ell}{EA}, \quad \Delta l_{13} = \frac{T_2 \frac{\sqrt{2}}{2} \ell}{\sqrt{2} EA}, \quad \Delta l_{23} = \frac{T_3 \frac{\sqrt{2}}{2} \ell}{\sqrt{2} EA}$$

sau

$$\Delta l_{12} = \frac{T_1 \ell}{EA}, \quad \Delta l_{13} = \frac{T_2 \ell}{2EA}, \quad \Delta l_{23} = \frac{T_3 \ell}{2EA}. \quad (2.9)$$

S-au adăugat astfel încă trei ecuații, deci există acum 12 ecuații cu 16 necunoscute. Mai trebuie stabilite 4 ecuații.

2.4 Condițiile la limită

Cele 4 ecuații necesare sunt condițiile la limită

$$U_1 = V_1 = V_2 = U_3 = 0, \quad (2.10)$$

care completează sistemul de 16 ecuații algebrice liniare.

2.5 Rezolvarea în funcție de deplasări

Relațiile (2.9) pot fi utilizate pentru transformarea ecuațiilor de compatibilitate (2.6) – (2.8) în relații forță/deplasare

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{EA}{\ell} \Delta \ell_{12} = \frac{EA}{\ell} (U_2 - U_1), \\ T_2 &= \frac{2EA}{\ell} \Delta \ell_{13} = \frac{EA}{\ell} \sqrt{2} (U_3 - U_1 + V_3 - V_1), \\ T_3 &= \frac{2EA}{\ell} \Delta \ell_{23} = \frac{EA}{\ell} \sqrt{2} (-U_3 + U_2 + V_3 - V_2). \end{aligned}$$

Înlocuind expresiile forțelor $T_1 - T_3$ în ecuațiile de echilibru (2.1) – (2.3), rezultă următoarele 6 ecuații

$$\begin{aligned} 2U_1 + V_1 - U_2 - U_3 - V_3 &= \frac{F_1 \ell}{EA}, \\ U_1 + V_1 - U_3 - V_3 &= \frac{F_2 \ell}{EA}, \\ -U_1 + 2U_2 - V_2 - U_3 + V_3 &= \frac{6F \ell}{EA}, \\ -U_2 + V_2 + U_3 - V_3 &= \frac{F_4 \ell}{EA}, \\ -U_1 - V_1 - U_2 + V_2 + 2U_3 &= \frac{F_5 \ell}{EA}, \\ -U_1 - V_1 + U_2 - V_2 + 2V_3 &= \frac{9F \ell}{EA}. \end{aligned}$$

Ținând cont de condițiile la limită (2.10), acest sistem de șase ecuații se poate scrie în formă matricială

$$\frac{EA}{\ell} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ U_2 \\ 0 \\ 0 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 6F \\ F_4 \\ F_5 \\ 9F \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

A treia și a șasea ecuație pot fi decuplate

$$\frac{EA}{\ell} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} 6F \\ 9F \end{Bmatrix}$$

rezultând deplasările necunoscute

$$U_2 = \frac{F \ell}{EA}, \quad V_3 = 4 \frac{F \ell}{EA}. \quad (2.12)$$

Înlocuind U_2 și V_3 în cele patru ecuații neutilizate, se obțin reacțiunile

$$F_1 = -5F, \quad F_2 = -4F, \quad F_4 = -5F, \quad F_5 = -F. \quad (2.13)$$

Înlocuind reacțiunile în ecuațiile de echilibru (2.1) – (2.3) rezultă forțele interioare în bare, care sunt egale și de sens contrar cu forțele care acționează asupra articulațiilor. Împărțind forțele interioare la aria corespunzătoare a secțiunii barei, se obțin tensiunile în bare.

2.5 Comparație între metoda forțelor și metoda deplasărilor

Problema lui Navier. Fie sistemul de 7 bare articulate din figura 2.4. În articulația 8 acționează o forță de componente F_x și F_y . Se cere să se determine forțele din bare și deplasarea articulației 8.

Metoda forțelor

Notând T_i ($i=1, \dots, 7$) forțele aplicate de bare asupra articulațiilor de la capete, ecuațiile de echilibru ale articulației 8 se pot scrie

$$\begin{aligned} F_x - \sum_{i=1}^7 T_i \cos \theta_i &= 0, \\ F_y - \sum_{i=1}^7 T_i \sin \theta_i &= 0. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Acesta este un sistem de două ecuații cu șapte necunoscute, deci este static nedeterminat. Se aleg $X_1 = T_3$, $X_2 = T_4$, $X_3 = T_5$, $X_4 = T_6$, și $X_5 = T_7$ necunoscutele static nedeterminate.

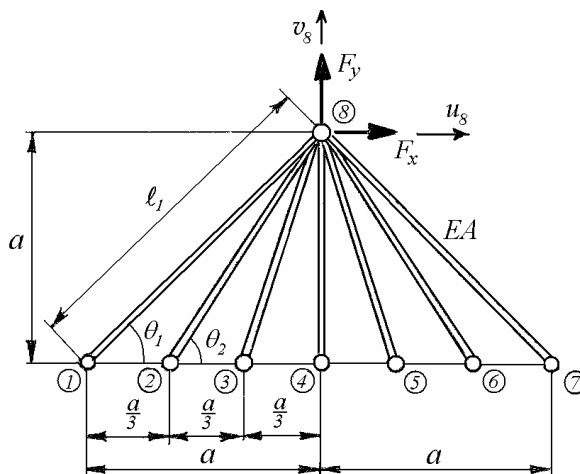


Fig. 2.4

Energia de deformație este

$$U = \frac{1}{2EA} \left(T_1^2 \ell_1 + T_2^2 \ell_2 + \sum_{i=1}^5 X_i^2 \ell_i \right), \quad (2.15)$$

unde T_1 și T_2 sunt funcții de X_1, \dots, X_5 , conform (2.14).

Deoarece deplasările în reazeme sunt nule, cele cinci condiții de deformație se pot scrie utilizând teorema lui Menabrea,

$$\frac{\partial U}{\partial X_i} = 0, \quad (i=1, \dots, 5) \quad (2.16)$$

sau

$$\ell_1 T_1 \frac{\partial T_1}{\partial X_i} + \ell_2 T_2 \frac{\partial T_2}{\partial X_i} + \ell_i X_i = 0. \quad (i=1, \dots, 5) \quad (2.17)$$

Acesta este un sistem de cinci ecuații liniare prin rezolvarea căruia se calculează cele cinci forțe hiperstatice X_1, \dots, X_5 .

Componentele deplasării articulației 8 se obțin din a doua teoremă a lui Castigliano

$$u_8 = \frac{\partial U}{\partial F_x}, \quad v_8 = \frac{\partial U}{\partial F_y}. \quad (2.18)$$

În metoda forțelor, cu cât numărul barelor este mai mare, cu atât mai mare este numărul forțelor static nedeterminate, deci numărul ecuațiilor (2.16).

Metoda deplasărilor

Ecuțiile de compatibilitate între alungiri și deplasări (2.5) se scriu

$$\Delta \ell_i = u_8 \cos \theta_i + v_8 \sin \theta_i. \quad (i = 1, \dots, 7) \quad (2.19)$$

Lungimile barelor sunt

$$\ell_i = \frac{a}{\sin \theta_i}. \quad (i = 1, \dots, 7) \quad (2.20)$$

Înlocuind (2.19) în relațiile între forțe și alungiri

$$T_i = EA \frac{\Delta \ell_i}{\ell_i}, \quad (i = 1, \dots, 7) \quad (2.21)$$

se obțin relațiile între forțe și deplasări

$$T_i = \frac{EA}{a} (u_8 \cos \theta_i + v_8 \sin \theta_i) \sin \theta_i. \quad (i = 1, \dots, 7) \quad (2.22)$$

Înlocuind (2.22) în ecuațiile de echilibru (2.14) ale articulației 8 rezultă

$$\begin{aligned} \frac{a}{EA} F_x - u_8 \sum_{i=1}^7 \cos^2 \theta_i \sin \theta_i - v_8 \sum_{i=1}^7 \sin^2 \theta_i \cos \theta_i &= 0, \\ \frac{a}{EA} F_y - u_8 \sum_{i=1}^7 \cos \theta_i \sin^2 \theta_i - v_8 \sum_{i=1}^7 \sin^3 \theta_i &= 0, \end{aligned} \quad (2.23)$$

din care se calculează u_8 și v_8 .

Îndependent de numărul barelor concurente, se obțin doar cele două ecuații din care se calculează componentele deplasării articulației comune. În formă matricială acestea se pot scrie

$$\begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_8 \\ v_8 \end{Bmatrix} \quad (2.24)$$

unde coeficienții de rigiditate sunt

$$\begin{aligned}K_{11} &= \frac{EA}{a} \sum_{i=1}^7 \cos^2 \theta_i \sin \theta_i = 1,409 \frac{EA}{a}, \\K_{12} = K_{21} &= \frac{EA}{a} \sum_{i=1}^7 \cos \theta_i \sin^2 \theta_i = 0, \\K_{22} &= \frac{EA}{a} \sum_{i=1}^7 \sin^3 \theta_i = 4,567 \frac{EA}{a}.\end{aligned}\tag{2.25}$$

Rezolvând (2.24) rezultă

$$u_8 = 0,7097 \frac{F_x a}{EA}, \quad v_8 = 0,219 \frac{F_y a}{EA}.\tag{2.26}$$

Procedeul folosit în metoda deplasărilor este același indiferent dacă structura este static determinată sau nu.

3.

METODA RIGIDITĂȚILOR

Metoda elementelor finite (M.E.F.) s-a dezvoltat ca o extensie a *metodei rigidităților* sau a *metodei deplasărilor*. În metoda rigidităților aplicată structurilor din bare, se consideră că elementele structurii sunt interconectate prin elemente de asamblare discrete. Relațiile între forțele și deplasările capetelor elementelor se exprimă printr-o *matrice de rigiditate a elementului*.

Se poate imagina că structura este realizată adăugând elementele unul câte unul, fiecare element fiind plasat într-o poziție predeterminată. Pe măsură ce elementele sunt adăugate structurii, se mărește capacitatea acesteia de a prelua sarcinile exterioare, deci se adaugă ceva *matricii de rigiditate a structurii*, care exprimă legătura între forțele la capetele elementelor și deplasările acestora. Dacă elementele structurii sunt bare articulate la capete, acestea sunt componente distincte care nu necesită nicio aproximare. Ele sunt elemente finite naturale. În acest caz, interesează în primul rând asamblarea matricilor de rigiditate ale elementelor și rezolvarea ecuațiilor de echilibru în funcție de deplasări.

Pornind de la grinzi din bare articulate la capete, se poate explica ușor procesul de asamblare și prezenta o introducere în metoda rigidităților în formulare matricială. În continuare se prezintă etapele principale ale *Metodei directe a rigidităților*, utilizând o grindă cu zăbrele plană.

3.1 Matricea de rigiditate a unui element de bară

În M.E.F., denumirile de “articulație” și “bară” sunt înlocuite prin *nod* și respectiv *element*. Se consideră un element cu două noduri, articulat la capete, în sistemul de coordonate *locale* (fig. 3.1), definit prin lungimea l_e , aria secțiunii transversale A_e și modulul de elasticitate longitudinal E_e . Nodurile sunt numerotate convenabil 1 și 2. Asupra elementului acționează *forțele nodale* f_1 , f_2 . *Deplasările nodale* sunt q_1 , q_2 .

În general, se consideră că elementele de bară au modul de rigiditate constant ($EA_e = \text{const.}$), sunt articulate la capete, liniar elastice, încărcate axial (nu sunt îndoite) și solicitate prin forțe aplicate doar la capete.

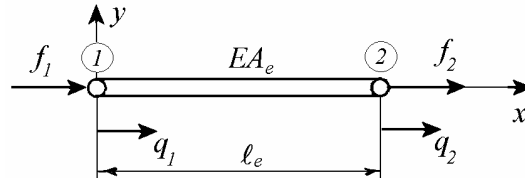


Fig. 3.1

Deplasările nodale q_1, q_2 și forțele nodale f_1, f_2 sunt pozitive în sensul pozitiv al axei x . Ecuația de echilibru a elementului de bară se scrie

$$f_1 + f_2 = 0. \quad (3.1)$$

În continuare, se utilizează relațiile forță/alungire, care includ relațiile de compatibilitate și relațiile între tensiuni și deformații specifice. Dacă se fixează capătul 1 și capătul 2 se poate deplasa liber, atunci pentru $q_1 = 0, q_2 = \frac{f_2 \ell_e}{E_e A_e}$,

$$f_1 = -f_2 = -\frac{E_e A_e}{\ell_e} q_2. \quad (3.2)$$

Similar, dacă se fixează capătul 2 și capătul 1 se poate deplasa liber, $q_2 = 0, q_1 = \frac{f_1 \ell_e}{E_e A_e}$ și

$$f_1 = -f_2 = \frac{E_e A_e}{\ell_e} q_1. \quad (3.3)$$

Combinând ecuațiile (3.2) și (3.3), se obține

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}}_{\text{forțe nodale}} = \underbrace{\frac{E_e A_e}{\ell_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{matricea de rigiditate}} \underbrace{\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}}_{\text{deplasări nodale}} \quad (3.4)$$

sau

$$\{f^e\} = [k^e] \{q^e\}, \quad (3.5)$$

unde matricea de rigiditate a elementului în coordonate locale este

$$[k^e] = \frac{E_e A_e}{\ell_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

3.2 Transformarea din coordonate locale în globale

Într-o grindă cu zăbrele, barele au diferite orientări în spațiu. Definirea rigidității acestora trebuie făcută față de un sistem global de coordonate, atașat întregii structuri. Forțele și deplasările capetelor barelor au câte două componente la fiecare nod, astfel că forțele nodale și deplasările nodale pot fi grupate în vectori coloană cu 4 elemente, legați printr-o matrice de rigiditate pătrată de ordinul 4.

3.2.1 Transformarea coordonatelor

În figura 3.2 este reprezentat un element de bară articulată la capete (*truss*) în poziția inițială și în poziția deformată. Deplasările nodale sunt notate cu litere mici în sistemul de coordonate locale xOy și cu litere mari - în sistemul de coordonate globale XOY .

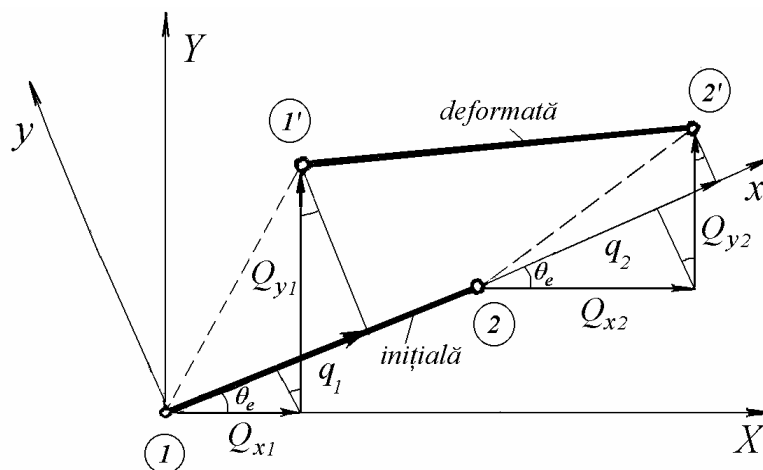


Fig. 3.2

Bara este înclinată cu unghiul θ_e față de axa X a sistemului de coordonate globale. De fapt, θ_e este unghiul între direcția pozitivă a axei X și direcția pozitivă a barei (definită de la 1 la 2).

Deplasările în sistemul de coordonate locale xOy pot fi exprimate în funcție de deplasările în sistemul de coordonate globale ca în (2.4)

$$\begin{aligned} q_1 &= Q_{x1} \cos \theta_e + Q_{y1} \sin \theta_e, \\ q_2 &= Q_{x2} \cos \theta_e + Q_{y2} \sin \theta_e. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Relațiile (3.7) se pot scrie matricial sub forma

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}}_{\text{deplasari locale}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\theta_e & \sin\theta_e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta_e & \sin\theta_e \end{bmatrix}}_{\text{matrice de transformare}} \underbrace{\begin{Bmatrix} Q_{x1} \\ Q_{y1} \\ Q_{x2} \\ Q_{y2} \end{Bmatrix}}_{\text{deplasari globale}} \quad (3.8)$$

sau

$$\{q^e\} = [T^e] \{Q^e\}, \quad (3.9)$$

unde

$$[T^e] = \begin{bmatrix} \cos\theta_e & \sin\theta_e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta_e & \sin\theta_e \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

este o matrice de transformare a coordonatelor.

Utilizând datele referitoare la coordonatele nodale, notând (X_1, Y_1) și (X_2, Y_2) coordonatele nodurilor 1 și 2, se calculează

$$\cos\theta_e = \frac{X_2 - X_1}{l_e}, \quad \sin\theta_e = \frac{Y_2 - Y_1}{l_e}, \quad l_e = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2}.$$

Mărimile definite mai sus intervin în elementele matricii (3.10).

3.2.2 Transformarea forțelor

Fie bara articulată la capete (fig. 3.3) sollicitată de forțele f_1 și f_2 aplicate la capetele 1 și 2.

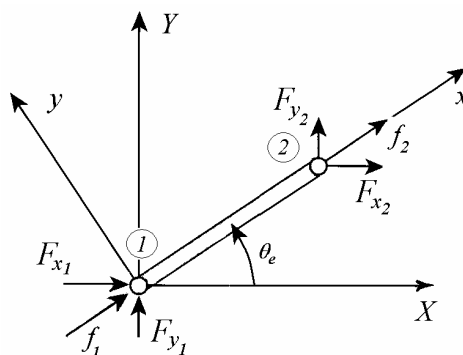


Fig. 3.3

Componentele forțelor în sistemul de coordonate global sunt

$$\begin{aligned} F_{x_1} &= f_1 \cos \theta_e, & F_{x_2} &= f_2 \cos \theta_e, \\ F_{y_1} &= f_1 \sin \theta_e, & F_{y_2} &= f_2 \sin \theta_e. \end{aligned} \quad (3.11)$$

În formă matricială

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} F_{x_1} \\ F_{y_1} \\ F_{x_2} \\ F_{y_2} \end{Bmatrix}}_{\text{componente ale forțelor globale}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos \theta_e & 0 \\ \sin \theta_e & 0 \\ 0 & \cos \theta_e \\ 0 & \sin \theta_e \end{bmatrix}}_{\text{matrice de transformare}} \underbrace{\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}}_{\text{forțe locale}}, \quad (3.12)$$

sau

$$\{F^e\} = [T^e]^T \{f^e\}. \quad (3.13)$$

Ecuția (3.13) poate fi obținută direct din expresiile lucrului mecanic. Acesta este o mărime scalară, având aceeași valoare indiferent de sistemul în care este calculat

$$\{f^e\}^T \{q^e\} = \{F^e\}^T \{Q^e\}. \quad (3.14)$$

Înlocuind deplasările locale din expresia (3.9), ecuația (3.14) devine

$$\{f^e\}^T \{q^e\} = \{f^e\}^T [T^e] \{Q^e\} = \{F^e\}^T \{Q^e\},$$

deci

$$\{f^e\}^T [T^e] = \{F^e\}^T$$

care prin transpoziție devine (3.13).

3.2.3 Matricea de rigiditate a unui element în coordonate globale

Înlocuind expresia (3.5) în (3.13), apoi expresia (3.9) în produsul matricial, și comparând cu (3.13)

$$\{F^e\} = [T^e]^T \{f^e\} = [T^e]^T [k^e] \{q^e\} = \underbrace{[T^e]^T [k^e] [T^e]} \{Q^e\}$$

rezultă

$$\{F^e\} = [K^e] \{Q^e\} \quad (3.15)$$

unde

$$[K^e] = [T^e]^T [k^e] [T^e]. \quad (3.16)$$

Efectuând înmulțirile matriciale și utilizând (3.10) se obține *matricea de rigiditate a elementului în coordonate globale*

$$[K^e] = \frac{E_e A_e}{\ell_e} \begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix}, \quad (3.17)$$

unde $c = \cos \theta_e$ și $s = \sin \theta_e$.

Matricea de rigiditate a elementului este un factor de proporționalitate între vectorul forțelor aplicate de noduri asupra elementului și vectorul deplasărilor nodale în coordonate globale

$$\begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \end{Bmatrix}_e = \frac{E_e A_e}{\ell_e} \begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_{x1} \\ Q_{y1} \\ Q_{x2} \\ Q_{y2} \end{Bmatrix}_e. \quad (3.17, a)$$

3.2.4 Proprietăți ale matricii de rigiditate a unui element

Matricea de rigiditate a elementului este simetrică, cu elemente diagonale pozitive, singulară (de rang 1 și ordin 4) iar suma elementelor de pe fiecare coloană (linie) este zero.

3.2.4.1 Matrice simetrică

Matricile de rigiditate sunt simetrice

$$[K^e] = [K^e]^T.$$

Exprimând deplasările în funcție de forțe se obține

$$\{Q^e\} = [K^e]^{-1} \{F^e\} = [\delta^e] \{F^e\},$$

de unde rezultă că înversa matricii de rigiditate este *matricea de flexibilitate*

$$[K^e]^{-1} = [\delta^e]. \quad (3.18)$$

Conform teoremei reciprocității formulate de Maxwell, matricea de flexibilitate $[\delta^e]$ trebuie să fie simetrică față de diagonala principală. La fel trebuie să fie inversa acesteia, matricea de rigiditate.

La același rezultat se ajunge din considerente energetice. La structuri liniare, deplasările sunt proporționale cu sarcinile aplicate. Când forțele cresc de la zero la valorile finale, lucrul mecanic total al acestor forțe este

$$W^e = \frac{1}{2} \{Q^e\}^T \{F^e\}. \quad (3.19)$$

În lipsa efectelor dinamice, acest lucru mecanic este absorbit de structură sub formă de energie de deformație. Înlocuind (3.15) în (3.19) se obține energia de deformație care este o mărime scalară

$$U_e = \frac{1}{2} \{Q^e\}^T [K^e] \{Q^e\}. \quad (3.20)$$

Aceasta este egală cu transpusa produsului matricial

$$U_e = \frac{1}{2} \{Q^e\}^T [K^e]^T \{Q^e\} \quad (3.20, a)$$

deci

$$[K^e] = [K^e]^T,$$

ceea ce definește simetria.

3.2.4.2 Matrice singulară

Matricea de rigiditate a elementului este de ordinul 4 și rang 1. Deficiența de rang este 3 ceea ce corespunde cu cele trei forme independente de mișcare de corp rigid în plan pentru bara liberă: două translații și o rotație.

O bară liberă (nerezemată) poate fi deplasată în spațiu ca un corp rigid, fără să fie deformată, deci cu energie de deformație nulă. Rezultă că există un număr de deplasări de corp rigid $\{Q^e\}$ pentru care $2U^e = \{Q^e\}^T [K^e] \{Q^e\} = 0$ deci $[K^e] \{Q^e\} = \{0\}$. În acest caz determinantul matricii $[K^e]$ este zero. Se spune că matricea $[K^e]$ este *singulară*. Modurile de corp rigid sunt definite de vectorii proprii corespunzători valorilor proprii nule.

Anularea determinantului presupune existența unor relații liniare între coloanele (liniile) sale. Rangul unei matrici este egal cu ordinul celei mai mari submatrici principale cu determinant diferit de zero. Se poate verifica în acest caz că determinanții de ordinul 3 și ordinul 2 sunt zero, deci matricea de rigiditate are rangul 1.

3.2.4.3 Elemente diagonale pozitive

Fiecare element de pe diagonala matricii $[K^e]$ este pozitiv. În caz contrar, forța și deplasarea corespunzătoare ar fi orientate în sensuri contrare, ceea ce este

fizic imposibil. Mai mult, matricea $[K^e]$ este pozitiv semidefinită. Cu alte cuvinte, forma pătratică ce reprezintă energia de deformare (3.20) este pozitivă sau zero.

3.2.4.4 Suma elementelor de pe fiecare coloană (linie) este zero

Fie un element de bară cu capătul 2 fix ($Q_{x2} = Q_{y2} = 0$) și capătul 1 având o deplasare egală cu 1 în lungul axei globale X ($Q_{x1} = 1, Q_{y1} = 0$) ca în figura 3.4.

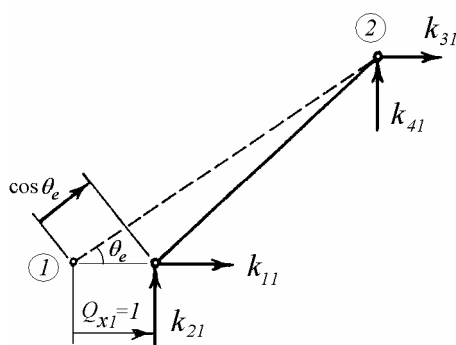


Fig. 3.4

Ecuția (3.17, a) se poate scrie

$$\begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & \cdot & \cdot & \cdot \\ k_{21} & \cdot & \cdot & \cdot \\ k_{31} & \cdot & \cdot & \cdot \\ k_{41} & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_{x1} = 1 \\ Q_{y1} = 0 \\ Q_{x2} = 0 \\ Q_{y2} = 0 \end{Bmatrix} \quad (3.21)$$

de unde se obține

$$F_{x1} = k_{11}, \quad F_{y1} = k_{21}, \quad F_{x2} = k_{31}, \quad F_{y2} = k_{41}. \quad (3.22)$$

Rezultă că prima coloană a matricii de rigiditate reprezintă forțele care trebuie aplicate elementului pentru a-l menține în echilibru când $Q_{x1} = 1$ și toate celelalte deplasări sunt nule.

Deplasarea $Q_{x1} = 1$ produce o scurtare axială $Q_{x1} \cos \theta_e = \cos \theta_e$, care corespunde unei forțe de compresiune $\frac{E_e A_e}{l_e} \cos \theta_e$, ale cărei componente trebuie echilibrate de forțele exterioare k_{11} , k_{21} , k_{31} și k_{41} . Ecuțiile de echilibru al forțelor orizontale și al celor verticale sunt

$$k_{11} + k_{31} = 0, \quad k_{21} + k_{41} = 0,$$

deci suma elementelor de pe prima coloană este zero. Același lucru se poate demonstra și pentru celelalte coloane.

În matricea de rigiditate a elementului de bară, fiecare coloană reprezintă un sistem de forțe nodale în echilibru, produse de o deplasare egală cu unitatea pe unul din gradele de libertate.

3.3 Modelul lui Link

Pentru a ilustra asamblarea matricii de rigiditate globale din matricile de rigiditate ale elementelor, se consideră grinda cu zăbrele analizată de Link [74] din figura 3.5, studiată deja în Capitolul 2, fig. 2.1.

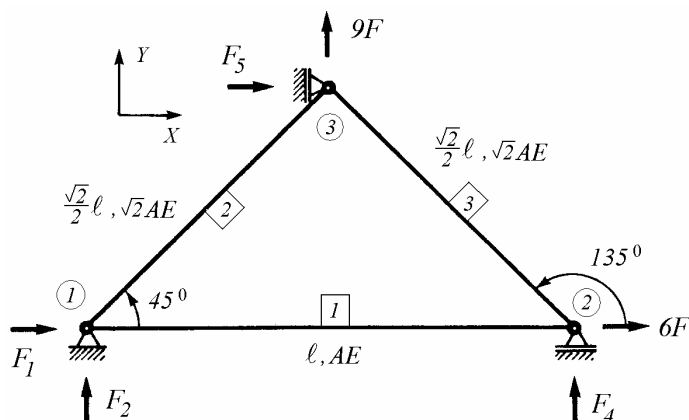


Fig. 3.5

Grinda are 3 *elemente* și 3 *noduri*; este simplu rezemată în 2 și 3, articulată în 1, și încărcată cu forțele $6F$ și $9F$. Deplasările globale și forțele nodale sunt evidențiate în fig. 3.6. În nodul i deplasările și forțele au indicii $(2i-1)$ și $2i$.

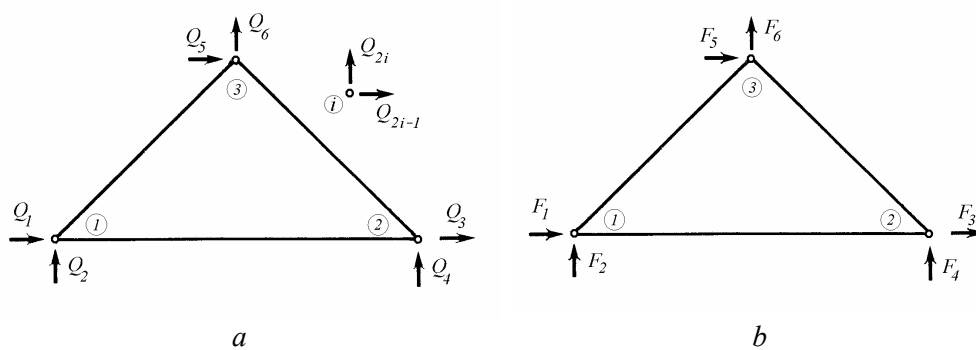


Fig. 3.6

Datele despre elemente și informații utile în calcul sunt prezentate în Tabelul 3.1. Primele trei coloane definesc conectivitatea elementelor, adică localizarea acestora în cadrul structurii. Numerotarea elementelor este arbitrară.

Tabelul 3.1

Bara	Nodurile		θ_e	$\cos\theta_e$	$\sin\theta_e$	c^2	s^2	cs	ℓ_e	EA_e	$\frac{EA_e}{\ell_e}$
	i	j									
1	1	2	0	1	0	1	0	0	ℓ	EA	$\frac{EA}{\ell}$
2	1	3	45	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}\ell$	$\sqrt{2}EA$	$2\frac{EA}{\ell}$
3	2	3	135	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}\ell$	$\sqrt{2}EA$	$2\frac{EA}{\ell}$

3.4 Metoda asamblării directe

Utilizând datele din Tabelul 3.1, se calculează matricile de rigiditate ale elementelor (3.17)

$$[K^1] = \frac{EA}{\ell} \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \dots & \dots \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \dots & \dots \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \dots & \dots \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix},$$

$$[K^2] = \frac{EA}{\ell} \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \dots & \dots & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \dots & \dots & \bullet & \bullet \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bullet & \bullet & \dots & \dots & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \dots & \dots & \bullet & \bullet \end{bmatrix},$$

și

$$[K^3] = \frac{EA}{\ell} \begin{matrix} & \begin{matrix} 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 & -1 & -1 & 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \dots & \dots & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \dots & \dots & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \dots & \dots & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{bmatrix}.$$

Deasupra și în dreapta matricilor de rigiditate ale elementelor se indică numerotarea coordonatelor în matricea de rigiditate globală, conform Tabelului 3.2.

Tabelul 3.2

	Nodul			
	1		2	
	Direcția			
	X	Y	X	Y
	Coordonata nodală locală			
	1	2	3	4
Elementul	Coordonata nodală globală			
1	1	2	3	4
2	1	2	5	6
3	3	4	5	6

Asamblarea *matricii de rigiditate globale nereduse* (3.28) se face sistematic, plasând fiecare coeficient al matricilor de rigiditate ale elementelor în locul corespunzător din matricea globală 6×6 (pentru acest exemplu), așa cum se indică prin puncte negre, eventual adăugându-l coeficienților deja acumulați în poziția respectivă. Acest procedeu se numește *metoda matricială directă*.

De exemplu, elementul 2 este situat în structură între nodul din stânga $i=1$ și nodul din dreapta $j=3$ (indicii nodali i și j pot fi arbitrari). În matricea globală, cele două componente ale forțelor și deplasărilor (în lungul axelor X și Y) pentru nodul $i=1$ sunt numerotate $2i-1=1$ și $2i=2$, iar cele pentru nodul $j=3$ sunt numerotate $2j-1=5$ și $2j=6$.

Simpla adunare a coeficienților de rigiditate dintr-o locație se bazează pe faptul că ecuațiile modelului cu elemente finite sunt de fapt ecuații de echilibru ale nodurilor, astfel că dacă un nod este comun mai multor elemente, atunci fiecare element va contribui cu o forță pentru menținerea echilibrului într-o configurație cu anumite valori ale deplasărilor nodale. O altă explicație algebrică a procesului de asamblare a matricilor de rigiditate ale sistemului este prezentată în continuare.

3.5 Compatibilitatea deplasărilor nodale

Compatibilitatea deplasărilor nodale ale unui element, cu deplasările nodale ale întregii structuri, poate fi exprimată prin ecuații de forma

$$\{Q^e\} = [\tilde{T}^e] \{\bar{Q}\}, \quad (3.23)$$

unde $\{Q^e\}$ este vectorul deplasărilor elementului în coordonate globale, $\{\bar{Q}\}$ este vectorul tuturor deplasărilor structurii de bare și $[\tilde{T}^e]$ este o *matrice de conectivitate* sau *de localizare*, care are elemente egale cu unitatea la deplasările nodale ale elementului.

Pentru sistemul de bare din fig. 3.5, aplicând ecuația (3.23) celor trei elemente se obține

$$\{Q^1\} = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{Bmatrix} = [\tilde{T}^1] [\bar{Q}],$$

$$\{Q^2\} = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{Bmatrix} = [\tilde{T}^2] [\bar{Q}],$$

$$\{Q^3\} = \begin{Bmatrix} Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{Bmatrix} = [\tilde{T}^3] [\bar{Q}].$$

3.6 Matricea de rigiditate expandată a unui element

Energia de deformație a unui element în coordonate globale poate fi exprimată în funcție de vectorul deplasărilor globale înlocuind (3.23) în (3.20,a)

$$U_e = \frac{1}{2} \{ \bar{Q} \}^T [\tilde{T}^e]^T [K^e] [\tilde{T}^e] \{ \bar{Q} \}$$

sau

$$U_e = \frac{1}{2} \{ \bar{Q} \}^T [\tilde{K}^e] \{ \bar{Q} \},$$

unde *matricea de rigiditate expandată a unui element*

$$[\tilde{K}^e] = [\tilde{T}^e]^T [K^e] [\tilde{T}^e] \quad (3.24)$$

are dimensiunile matricii globale a sistemului.

Pentru sistemul de bare din fig. 3.5, din ecuația (3.24) rezultă

$$[\tilde{K}^1] = [\tilde{T}^1]^T [K^1] [\tilde{T}^1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{EA}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

sau

$$[\tilde{K}^1] = \frac{EA}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$[\tilde{K}^2] = [\tilde{T}^2]^T [K^2] [\tilde{T}^2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{EA}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

sau

$$[\tilde{K}^2] = \frac{EA}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

și

$$[\tilde{K}^3] = [\tilde{T}^3]^T [K^3] [\tilde{T}^3] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{EA}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

sau

$$[\tilde{K}^3] = \frac{EA}{\ell} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

3.7 Matricea de rigiditate globală neredusă

Energia de deformație a întregii structuri

$$U = \frac{1}{2} \{ \bar{Q} \}^T [\bar{K}] \{ \bar{Q} \}, \quad (3.25)$$

poate fi calculată prin simpla însumare a energiilor de deformație ale elementelor

$$U = \sum_e U_e = \sum_e \frac{1}{2} \{ \bar{Q} \}^T [\tilde{K}^e] \{ \bar{Q} \} = \frac{1}{2} \{ \bar{Q} \}^T \sum_e [\tilde{K}^e] \{ \bar{Q} \}. \quad (3.26)$$

Comparând expresiile (3.25) și (3.26) se obține

$$[\bar{K}] = \sum_e [\tilde{K}^e] . \quad (3.27)$$

Matricea de rigiditate globală este egală cu suma matricilor de rigiditate expandate ale elementelor.

Matricea de rigiditate neredusă $[\bar{K}]$ este simetrică, singulară, cu elemente pozitive pe diagonala principală și cu suma elementelor din fiecare coloană egală cu zero. Ea corespunde structurii fără reazeme. Matricea de rigiditate a structurii rezemate se obține condensând această matrice, utilizând condițiile la limită.

Efectul reazemelor elastice modelate ca arcuri discrete poate fi inclus adăugând rigiditățile acestora în locațiile respective pe diagonala principală a matricii de rigiditate.

Pentru structura din fig. 3.5, ecuația (3.27) se scrie

$$[\bar{K}] = [\tilde{K}^1] + [\tilde{K}^2] + [\tilde{K}^3] = \frac{EA}{\ell} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}. \quad (3.28)$$

Matricile de rigiditate expandate ale elementelor au fost folosite mai sus doar pentru a descrie algebric asamblarea matricii de rigiditate globale; în practică acestea nu sunt utilizate. Produsul matricial (3.24) este costisitor și nu este calculat niciodată. Asamblarea matricii de rigiditate globale se face prin amplasarea coeficienților nenuli ai matricilor de rigiditate ale elementelor *direct* în locațiile lor din matricea de rigiditate globală, impuse de conectivitatea elementelor.

3.8 Ecuațiile de echilibru ale forțelor la noduri

Asamblarea matricii de rigiditate globale s-a făcut pe baza unor considerații energetice. În continuare se face o prezentare diferită, bazată pe ecuațiile de echilibru ale forțelor la noduri, utilizând structura de bare din fig. 3.5.

Ecuațiile de echilibru ale elementelor (3.1) utilizate până acum, conțin doar forțele aplicate de noduri asupra elementelor. În continuare se utilizează ecuațiile de echilibru ale nodurilor, în care apar forțele aplicate de elemente asupra nodurilor.

În fig. 3.7 se prezintă structura desfăcută în elemente componente. În afara forțelor exterioare și a reacțiunilor din reazeme, asupra nodurilor acționează forțe egale și de sens contrar celor aplicate elementelor. Pentru claritatea expunerii, forțele egale au aceeași notație.

Descompunând forțele nodale în componente orizontale și verticale, se obțin șase ecuații de echilibru.

$$\begin{aligned}
 F_1 &= F_{x1}^1 + F_{x1}^2, & F_3 &= F_{x2}^1 + F_{x1}^3, & F_5 &= F_{x2}^2 + F_{x2}^3, \\
 F_2 &= F_{y1}^1 + F_{y1}^2, & F_4 &= F_{y2}^1 + F_{y1}^3, & F_6 &= F_{y2}^2 + F_{y2}^3.
 \end{aligned}$$

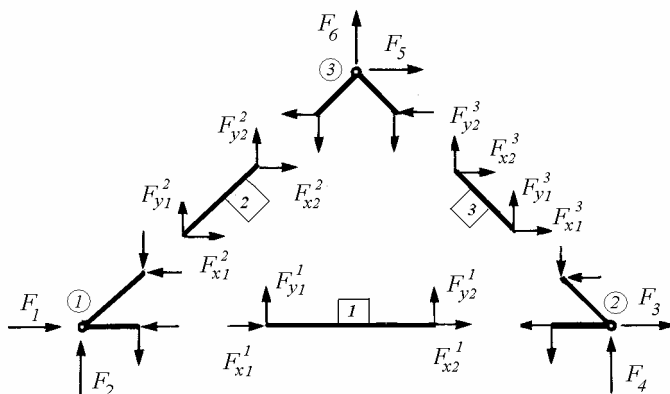


Fig. 3.7

În formă matricială

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} F_{x1}^1 \\ F_{y1}^1 \\ F_{x2}^1 \\ F_{y2}^1 \\ \hline F_{x1}^2 \\ F_{y1}^2 \\ F_{x2}^2 \\ F_{y2}^2 \\ \hline F_{x1}^3 \\ F_{y1}^3 \\ F_{x2}^3 \\ F_{y2}^3 \end{Bmatrix}$$

și prin partiționare, ca sumă de produse scalare

$$\{\bar{F}\} = [\tilde{T}^1]^T \{F^1\} + [\tilde{T}^2]^T \{F^2\} + [\tilde{T}^3]^T \{F^3\}$$

sau în general

$$\{\bar{F}\} = \sum_e [\tilde{T}^e]^T \{F^e\}. \quad (3.29)$$

Înlocuind (3.15) și (3.23), relația (3.29) devine

$$\{\bar{F}\} = \sum_e [\tilde{T}^e]^T [K^e] \{Q^e\} = \sum_e \underbrace{[\tilde{T}^e]^T [K^e] [\tilde{T}^e]}_{[\bar{K}^e]} \{\bar{Q}\}, \quad (3.30)$$

apoi, utilizând relațiile (3.24) și (3.27), se poate scrie

$$\{\bar{F}\} = \sum_e [\bar{K}^e] \{\bar{Q}\} = [\bar{K}] \{\bar{Q}\}. \quad (3.31)$$

Matricea de rigiditate globală neredusă $[\bar{K}]$ exprimă vectorul neredus al forțelor nodale $\{\bar{F}\}$ în funcție de vectorul neredus al deplasărilor nodale $\{\bar{Q}\}$.

3.9 Matricea de rigiditate globală redusă

Structura din bare trebuie rezemată corespunzător și nu trebuie să conțină vreun mecanism interior. Condițiile la limită elimină posibilitatea ca structura să se miște ca un corp rigid.

Un tip general de condiții la limită sunt *deplasările impuse* ale nodurilor din reazeme, de forma $Q_i = a_i$ ($i=1$ la n_s), unde n_s este numărul reazemelor. De obicei deplasările nodale ale reazemelor sunt zero, $Q_i = 0$. Un alt tip sunt *legăturile multiple*, cum sunt cele din reazemele înclinate rigide sau cu role, de forma $b_i Q_i + b_j Q_j = b_0$, unde b_i , b_j și b_0 sunt constante date.

Pentru o structură cu N grade de libertate, ecuațiile cu elemente finite (3.31) au forma

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{1N} \\ K_{21} & K_{22} & \cdots & K_{2N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ K_{N1} & K_{N2} & \cdots & K_{NN} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \cdots \\ Q_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \cdots \\ F_N \end{Bmatrix}.$$

Presupunem că există o singură condiție la limită, $Q_1 = a_1$. Deoarece Q_1 este cunoscut, ecuațiile cu elemente finite în cele $N-1$ necunoscute rămase sunt

$$\begin{bmatrix} K_{22} & K_{23} & \cdots & K_{2N} \\ K_{32} & K_{33} & \cdots & K_{3N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ K_{N2} & K_{N3} & \cdots & K_{NN} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} Q_2 \\ Q_3 \\ \cdots \\ Q_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_2 - K_{21}a_1 \\ F_3 - K_{31}a_1 \\ \cdots \\ F_N - K_{N1}a_1 \end{Bmatrix}. \quad (3.32)$$

Matricea de rigiditate de ordinul $(N-1)$ se obține prin simpla eliminare a primei linii și a primei coloane din matricea originală de ordinul N .

Ecuția (3.32) se poate scrie condensat sub forma

$$[K]\{Q\} = \{F\}, \quad (3.33)$$

unde $[K]$ este o *matrice de rigiditate redusă*, obținută prin eliminarea liniilor și coloanelor corespunzătoare gradelor de libertate ale “reazemelor” sau cu mișcare impusă, $\{Q\}$ și $\{F\}$ sunt vectorul redus al deplasărilor și vectorul redus al forțelor nodale globale.

Pentru o grindă cu zăbrele cu mai multe reazeme, matricea de rigiditate globală redusă se obține înlăturând un număr de linii și coloane egal cu numărul deplasărilor impuse. Ecuțiile finale (3.33) se pot rezolva în funcție de vectorul $\{Q\}$ prin eliminare gaussiană. Matricea $[K]$ este nesingulară.

Este instructiv să se considere structura din fig. 3.5. Odată asamblată matricea de rigiditate globală neredusă, după înlocuirea condițiilor la limită $Q_1 = Q_2 = Q_4 = Q_5 = 0$ și a valorilor forțelor exterioare $F_3 = 6F$ și $F_6 = 9F$, se obține următorul sistem de ecuații liniare

$$\frac{EA}{\ell} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ Q_3 \\ 0 \\ 0 \\ Q_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 6F \\ F_4 \\ F_5 \\ 9F \end{bmatrix}. \quad (3.34)$$

Se observă că acolo unde se dau deplasările, forțele nodale sunt necunoscute, și acolo unde se cunosc forțele, deplasările nodale sunt necunoscute. Ecuțiile (3.34) se pot rearanja în forma

$$\frac{EA}{\ell} \left[\begin{array}{cc|ccc} 2 & 1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ \hline -1 & -1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 2 \end{array} \right] \cdot \begin{bmatrix} Q_3 \\ Q_6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6F \\ 9F \\ F_1 \\ F_2 \\ F_4 \\ F_5 \end{bmatrix}. \quad (3.35)$$

Primele două ecuații se pot scrie

$$\frac{EA}{\ell} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q_3 \\ Q_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6F \\ 9F \end{bmatrix}$$

având soluțiile

$$Q_3 = \frac{F \ell}{EA}, \quad Q_6 = 4 \frac{F \ell}{EA}.$$

În general, pentru condiții la limită nenule, ecuațiile (3.33) se pot scrie în formă partiționată

$$\begin{bmatrix} [K_{aa}] & [K_{ab}] \\ [K_{ba}] & [K_{bb}] \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{Q_a\} \\ \{Q_b\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_a\} \\ \{F_b\} \end{Bmatrix}, \quad (3.36)$$

unde $\{F_a\}$ este vectorul forțelor cunoscute, $\{Q_b\}$ este vectorul deplasărilor cunoscute și $[K_{ba}] = [K_{ab}]^T$.

Ecuatiile din partiția superioară se pot scrie

$$\{F_a\} = [K_{aa}] \{Q_a\} + [K_{ab}] \{Q_b\}. \quad (3.37)$$

După înmulțire la stânga cu $[K_{aa}]^{-1}$ se obțin deplasările necunoscute

$$\{Q_a\} = [K_{aa}]^{-1} (\{F_a\} - [K_{ab}] \{Q_b\}). \quad (3.38)$$

3.10 Reacțiunile și forțele interioare

Forțele necunoscute, care în acest caz sunt reacțiunile exterioare, sunt date de partiția inferioară

$$\{F_b\} = [K_{ab}]^T \{Q_a\} + [K_{bb}] \{Q_b\}. \quad (3.39)$$

La structura din figura 3.5, deplasările reazemelor sunt nule, deci

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_4 \\ F_5 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{\ell} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \\ -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} Q_3 \\ Q_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -5F \\ -4F \\ -5F \\ -F \end{Bmatrix}.$$

Alungirea unui element (2.5) este

$$\Delta \ell_e = q_2 - q_1 = (Q_{x2} - Q_{x1}) \cos \theta_e + (Q_{y2} - Q_{y1}) \sin \theta_e, \quad (3.40)$$

deci poate fi calculată după ce s-au determinat toate deplasările.

Forța axială într-o bară articulată la capete este

$$T_e = \frac{E_e A_e}{l_e} \Delta l_e = \frac{E_e A_e}{l_e} [-c \quad -s \quad c \quad s] \begin{Bmatrix} Q_{x1} \\ Q_{y1} \\ Q_{x2} \\ Q_{y2} \end{Bmatrix}_e. \quad (3.41)$$

La structura din fig. 3.5, forțele din bare sunt

$$T_1 = \frac{EA}{\ell} [-1 \quad 0 \quad 1 \quad 0] \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{\ell} Q_3 = F,$$

$$T_2 = \frac{2EA}{\ell} \frac{\sqrt{2}}{2} [-1 \quad -1 \quad 1 \quad 1] \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{Bmatrix} = \frac{\sqrt{2}EA}{\ell} Q_6 = 4\sqrt{2}F,$$

$$T_3 = \frac{2EA}{\ell} \frac{\sqrt{2}}{2} [1 \quad 1 \quad -1 \quad 1] \begin{Bmatrix} Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{Bmatrix} = \frac{\sqrt{2}EA}{\ell} (Q_3 + Q_6) = 5\sqrt{2}F.$$

Tensiunile se calculează împărțind forța axială la aria secțiunii transversale.

3.11 Sarcini și tensiuni termice

Tensiunile termice se calculează cu metoda “bridării” dezvoltată de J. M. C. Duhamel (1838).

Se presupune întâi că deplasările nodale sunt complet blocate (structura este “bridată”). Rezultă deformațiile specifice termice $\varepsilon_T = -\alpha T$, unde α este coeficientul de dilatare termică liniară și T este diferența de temperatură. Starea bridată este echivalentă cu o pretensionare cu tensiunile de compresiune $\sigma_T = -\alpha ET$, unde E este modulul de elasticitate longitudinal al materialului.

Restrângerea produce în element o forță axială de compresiune αEAT , unde A este aria secțiunii transversale. Corespunzător, elementul acționează asupra nodurilor cu forțe egale și de sens contrar

$$\{F_T\} = \alpha EAT [-c \quad -s \quad c \quad s]^T, \quad (3.42)$$

sau, în coordonate locale

$$\{f_T\} = \alpha EAT [-1 \ 1]^T. \quad (3.42, a)$$

Aceste forțe trebuie incluse în vectorul forțelor nodale (adăugate forțelor exterioare, dacă este cazul). După determinarea deplasărilor produse de aceste forțe, alungirile elementelor se determină din (3.37) iar tensiunile se calculează cu relația

$$\sigma_e = E_e \left(\frac{\Delta l_e}{l_e} - \alpha T \right), \quad (3.43)$$

adică adăugând la tensiunile produse de sarcinile termice (și exterioare), tensiunile inițiale produse de bridare (constrângere). Este ca și cum forțele de deconstrângere se aplică la capetele elementului pentru a-l elibera de constrângerea inițială.

3.12 Numerotarea nodurilor

Matricile de rigiditate sunt simetrice și slab populate. Ele pot fi și matrici bandă, cu elementele nenule grupate într-o bandă în lungul diagonalei principale. Aceasta este evident la structurile unidimensionale și se poate realiza și la alte structuri prin numerotarea rațională a nodurilor.

Fie matricea de rigiditate globală neredusă de ordinul 12 a structurii din fig. 3.8, a, la care elementele nenule din triunghiul superior s-au notat cu X

$$[\bar{K}] = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccccccccccc} \times & \times & \times & \times & \times & \times & & & & & & \\ & \times & \times & \times & \times & \times & & & & & & 0 \\ & & \times & \times & \times & \times & \times & \times & & & & \\ & & & \times & \times & \times & \times & \times & & & & \\ & & & & \times & \times & \times & \times & \times & \times & & \\ & & & & & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \\ & & & & & & \times & \times & \times & \times & \times & \\ & & & & & & & \times & \times & \times & \times & \\ & & & & & & & & \times & \times & \times & \\ & & & & & & & & & \times & \times & \\ & & & & & & & & & & \times & \times \\ \text{s i m e t r i c a} & & & & & & & & & & & \times \end{array} \right] \end{array}. \quad (3.44)$$

Matricea fiind simetrică, au fost reținute doar intrările diagonale și cele situate de o parte a diagonalei principale. Datorită slabei populări, în triunghiul superior există multe zerouri. Lățimea semibenzii este notată B.

Deoarece interesează doar elementele nenule, informația din matricea pătrată (3.44) poate fi memorată în matricea 12×6 de mai jos

$$[\bar{K}_b] = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & & & & B \end{matrix} \\ & \begin{matrix} \downarrow & \downarrow & & & & \downarrow \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \\ \times & \times & \times & \times & \times & \\ \times & \times & \times & \times & \times & \\ \times & \times & \times & \times & & \\ \times & \times & \times & \times & & \\ \times & \times & & & & 0 \\ \times & \times & & & & \\ \times & & & & & \end{bmatrix} & \end{matrix} \quad (3.44, a)$$

Prima coloană conține elementele de pe diagonala principală a matricii (3.44). A doua coloană conține elementele de pe a doua diagonală. În general, diagonala m a matricii originale este memorată în coloana m a matricii compacte. Numărul coloanelor în matricea (3.44, a) este egal cu B – semibanda matricii originale. Eficiența stocării în formă de bandă crește cu ordinul matricii.

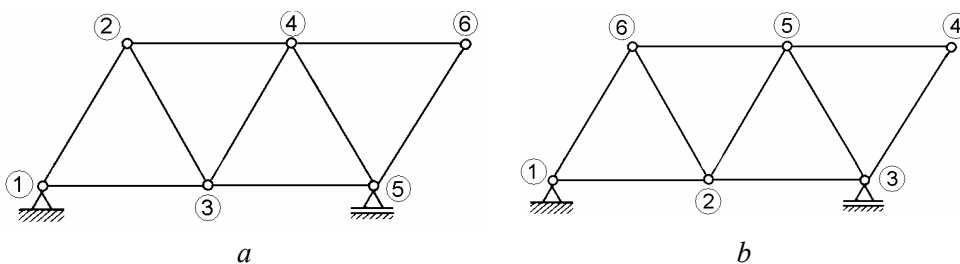


Fig. 3.8

La structurile din bare articulate, B este egal cu 2 plus dublul diferenței maxime între indicii nodurilor unui element. Pentru numerotarea nodurilor din figura 3.8, a, $B = 6$. Pentru numerotarea din fig. 3.8, b, $B = 12$, deci cu ordinul matricii inițiale.

Ca regulă generală, o lățime de bandă mică se poate obține numerotând nodurile în lungul dimensiunii mai mici a structurii, înaintând apoi în lungul dimensiunii mai mari.

Lățimea semibenzii este determinată automat în programul cu elemente finite pe baza numerotării elementelor. În afara economiei de memorie, se folosesc algoritmi de eliminare gaussiană concepuți special pentru matrici bandă care permit reducerea timpului rulării pe calculator.

Pentru matrici de rigiditate slab populate de ordin mare, o reducere eficientă a memoriei ocupate și a duratei de calcul se poate obține prin *stocarea sub formă de linie de orizont (skyline)* și utilizarea unui algoritm adecvat de rezolvare a sistemului liniar de ecuații. În acest caz, coloanele triunghiului superior al matricii sunt memorate pe rând, concatenate într-un vector $\{K_s\}$. Dacă în partea superioară a coloanei există zerouri, trebuie stocate doar intrările dintre elementul diagonal și primul element nenul. Linia de separație a zerourilor superioare de primul element nenul din fiecare coloană se numește *linie de orizont*.

Se consideră următoarea matrice

$$\begin{array}{c}
 \text{Înălțimea} \\
 \text{coloanei} \rightarrow
 \end{array}
 \begin{array}{ccccccccc}
 1 & 2 & 2 & 4 & 3 & 1 & 4 & 5 & \\
 \left[\begin{array}{cccccccccc}
 k_{11} & k_{12} & 0 & k_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\
 & k_{22} & k_{23} & k_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\
 & & k_{33} & k_{34} & k_{35} & 0 & 0 & 0 & & \\
 & & & k_{44} & 0 & 0 & k_{47} & k_{48} & & \\
 & & & & k_{55} & 0 & 0 & 0 & & \\
 & & & & & k_{66} & k_{67} & 0 & & \\
 & & & & & & k_{77} & k_{78} & & \\
 & & & & & & & & k_{88} &
 \end{array} \right]
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \\
 \\
 \\
 \text{Linia de} \\
 \text{orizont}
 \end{array}$$

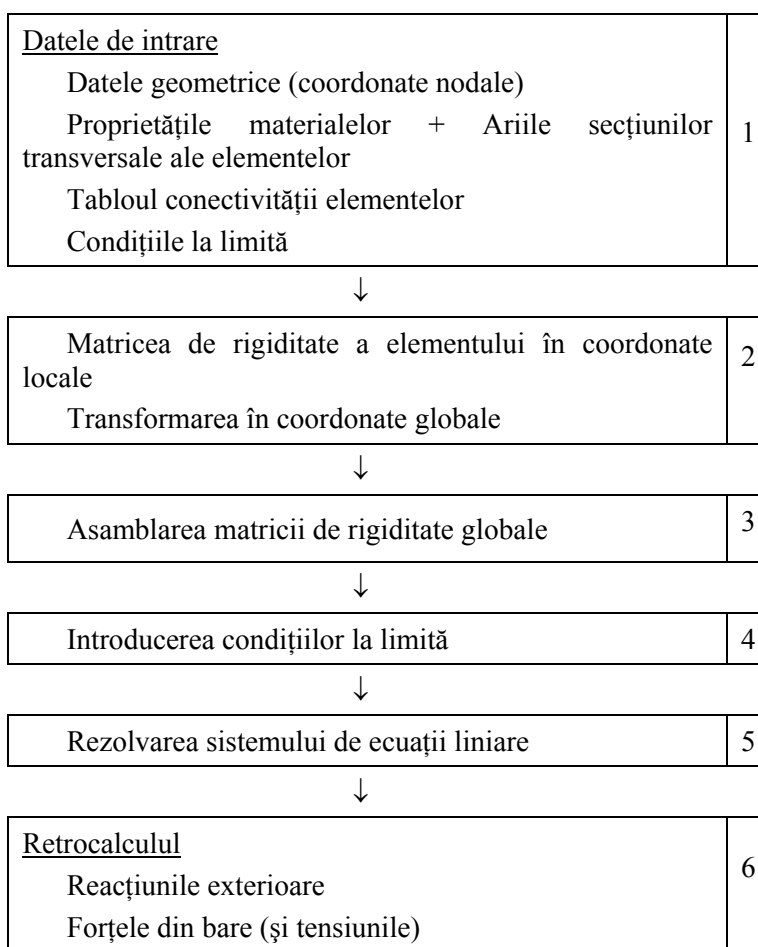
Coloanele active sunt stocate în vectorul coloană $\{K_s\}$ și se construiește un vector $\{ID\}$ care conține indicii elementelor diagonale din $\{K_s\}$

$$\{K_s\} = \left\{ \begin{array}{l}
 \overline{k_{11}} \\
 \overline{k_{12}} \\
 \overline{k_{22}} \\
 \overline{k_{23}} \\
 \overline{k_{33}} \\
 \overline{k_{14}} \\
 \overline{k_{24}} \\
 \overline{k_{34}} \\
 \overline{k_{44}} \\
 \dots \\
 \dots \\
 \overline{k_{88}}
 \end{array} \right\}
 \begin{array}{l}
 \leftarrow 1 \\
 \\
 \leftarrow 3 \\
 \\
 \leftarrow 5 \\
 \\
 \\
 \\
 \leftarrow 9 \\
 \\
 \\
 \\
 \end{array}
 \quad
 \{ID\} = \left\{ \begin{array}{l}
 1 \\
 3 \\
 5 \\
 9 \\
 12 \\
 13 \\
 17 \\
 22
 \end{array} \right\}.$$

Înălțimea coloanei j este $ID(j) - ID(j-1)$. La rezolvarea ecuațiilor metodei elemente finite se utilizează eliminarea Gauss folosind un program de rezolvare bazat pe stocarea sub formă de linie de orizont.

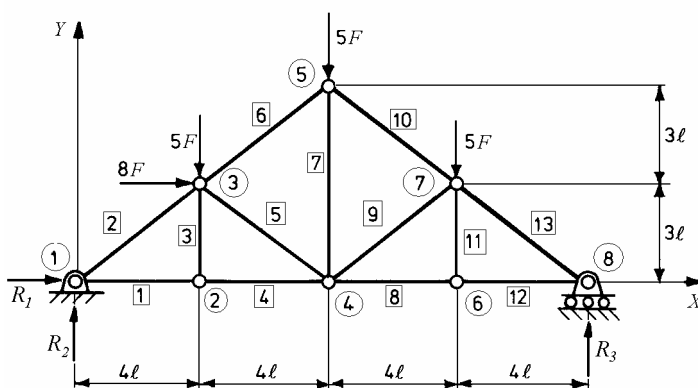
Mai jos se prezintă o schemă generală a metodei matriciale a deplasărilor.

Metoda matricială a deplasărilor



Probleme

E3.1. La grinda cu zăbrele din figura E3.1, *a*, se cere să se determine: a) deplasarea nodală maximă și nodul în care apare, b) tensiunea maximă și bara în care apare și c) reacțiunile din reazeme. Să se deseneze structura deformată.

Fig. E3.1, *a*

Răspuns. a) Modelul cu elemente finite are 8 noduri și 13 elemente.

Considerând pentru simplificare $\ell = 1$, $A = 1$, $E = 1$ și $F = 1$, rezultă:

Date despre noduri

Nodul nr	Blocaj		Coord		Deplasarea	
	X	Y	X	Y	X	Y
1	1	1	0	0	0	0
2	0	0	4	0	64	-361,1
3	0	0	4	3	208,3	-361,1
4	0	0	8	0	128	-391,8
5	0	0	8	6	127,6	-343,7
6	0	0	12	0	176	-339,7
7	0	0	12	3	62,9	-339,7
8	0	1	16	0	224	0

Date despre elemente

Elementul nr	Nodurile	Tensiuni normale	Elementul nr	Nodurile	Tensiuni normale
2	1, 3	-10	9	4, 7	-4,16
3	2, 3	0	10	5, 7	-10,83
4	2, 4	16	11	6, 7	0
5	3, 4	-9,16	12	6, 8	12
6	3, 6	-10,83	13	7, 8	-15
7	4, 5	8			

Reacțiunile din reazeme sunt $R_1 = -8$, $R_2 = 6$ și $R_3 = 9$. Forma deformată este prezentată în figura E3.1, *b*.

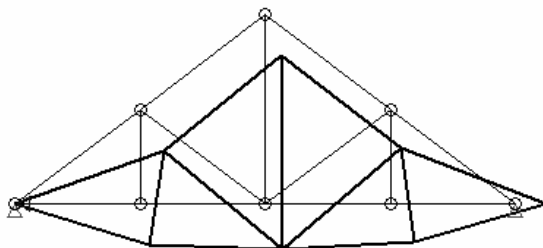


Fig. E3.1, *b*

E3.2. La grinda cu zăbrele din figura E3.2, *a* să se determine: a) deplasarea nodală maximă, b) tensiunea maximă și c) reacțiunile din reazeme. Să se deseneze forma deformată.

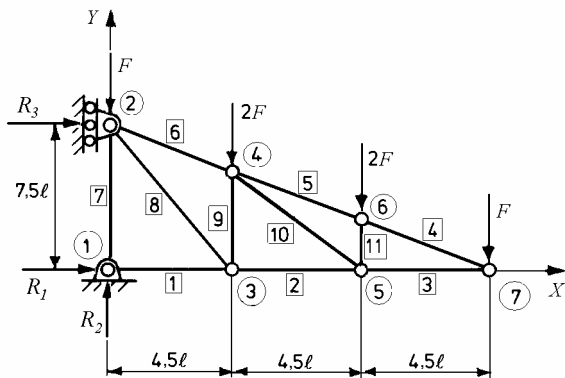


Fig. E3.2, *a*

Răspuns. Modelul cu elemente finite constă din 7 noduri și 11 elemente. a) Deplasarea verticală a nodului 7 este $v_7 = -219,787 \frac{F\ell}{EA}$. b) Tensiunea normală în elementul 7 este $N_7 = -6F/A$. c) Reacțiunile din reazeme sunt $R_1 = -R_3 = 5,4F$, și $R_2 = 6F$.

Forma deformată este prezentată în figura E3.2, *b*.

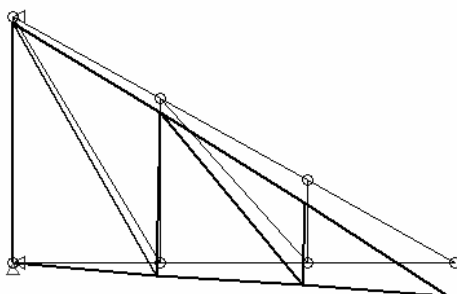


Fig. E3.2, b

E3.3. Fie grinda cu zăbrele din figura E3.3, a. Să se determine poziția și valoarea: a) deplasării nodale maxime, b) tensiunii maxime; c) să se calculeze reacțiunile. Să se deseneze forma deformată.

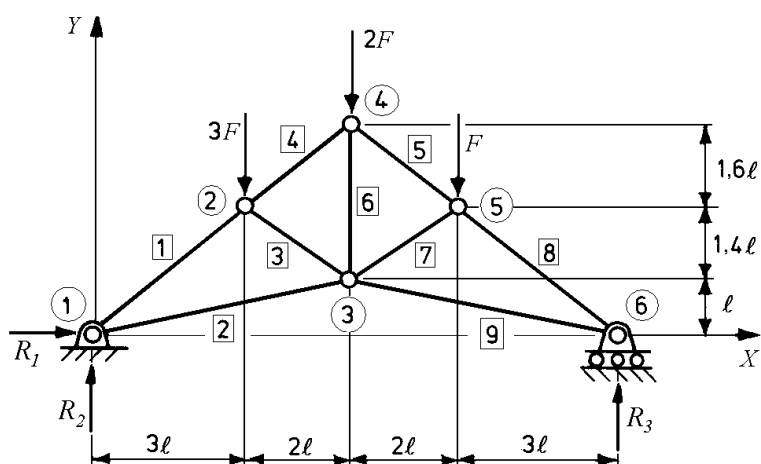


Fig. E3.3, a

Răspuns. Modelul cu elemente finite constă din 6 noduri și 9 elemente. a) Deplasarea verticală a nodului 3 este $v_3 = -137,83 \frac{F\ell}{EA}$. b) Tensiunea normală în elementul 1 este $N_1 = -7,25F/A$. c) Reacțiunile sunt $R_1 = 0$, $R_2 = 3,4F$ și $R_3 = 2,6F$.

Forma deformată este prezentată în figura E3.3, b.

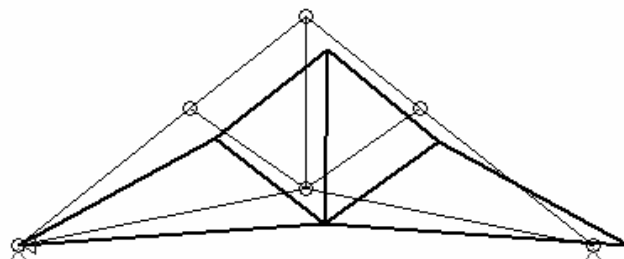


Fig. E3.3, b

E3.4. La grinda cu zăbrele din fig. E3.4, a să se determine: a) deplasarea nodală maximă, b) tensiunea maximă și c) reacțiunile. Să se deseneze forma deformată.

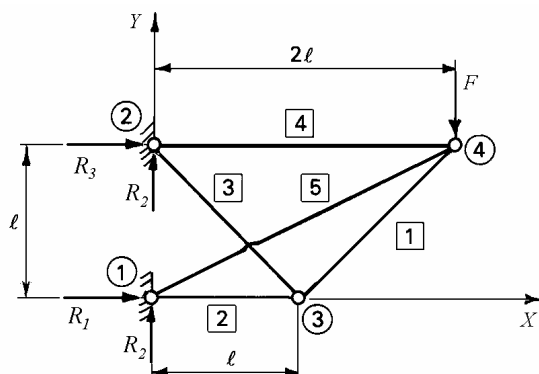


Fig. E3.4, a

Răspuns. Modelul cu elemente finite are 4 noduri și 5 elemente. Considerând pentru simplificare $\ell = 1$, $A = 1$, $E = 1$ și $F = 1$, rezultă:

Date despre noduri

Nodul nr	Blocaj X	Blocaj Y	Coord X	Coord Y	Deplas X	Deplas Y
1	1	1	0	0	0	0
2	1	1	0	1	0	0
3	0	0	1	0	-1,3294	-3,2095
4	0	0	2	1	2,6705	-9,0896

Date despre elemente

Elementul nr	Nodurile	Tensiunea normală
1	3, 4	- 0,940
2	1, 3	- 1,329
3	2, 3	0,940
4	2, 4	1,335
5	1, 4	- 0,749

a) Deplasarea verticală a nodului 4 este $v_4 = -9,09 F \ell / EA$. b) Tensiunea normală în elementul 4 este $N_4 = 1,335 F/A$. c) Reacțiunile sunt $R_1 = -R_3 = 2F$, $R_2 = 0,335F$ și $R_4 = 0,665F$. Forma deformată este prezentată în figura E3.4, b.

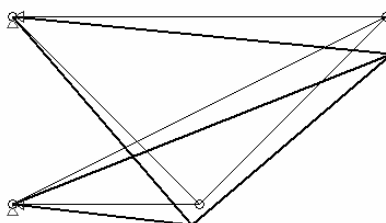


Fig. E3.4, b

E3.5. Fie grinda cu zăbrele din fig. E3.5, a la care nodul 6 este deplasat cu $v_6 = -5$. Să se determine locul și valoarea: a) deplasării nodale maxime; b) tensiunii maxime. Să se deseneze forma deformată.

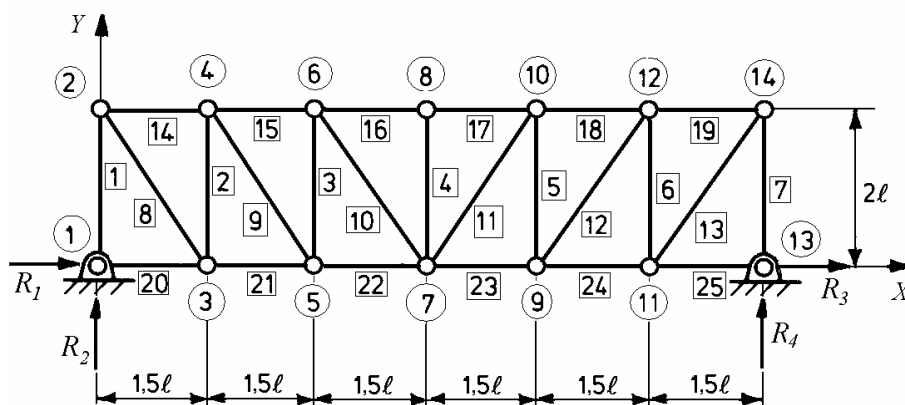


Fig. E3.5, a

Răspuns. Modelul cu elemente finite are 14 noduri și 25 elemente. Considerând pentru simplificare $\ell = 1$, $A = 1$ și $E = 1$, deplasările verticale ale nodurilor 7 și 8 sunt $v_7 = v_8 = -4,538$, iar tensiunea normală în bara 15 este $N_{15} = 0,366$. Forma deformată este prezentată în figura E3.5, b.

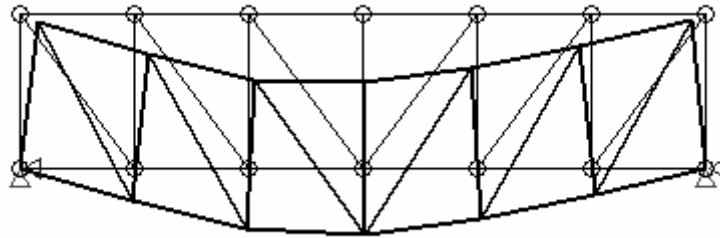


Fig. E3.5, b

4.

BARE ȘI ARBORI

În acest capitol se studiază elemente structurale unidimensionale, cu un singur grad de libertate pe nod. Deplasările în interiorul elementelor se exprimă în funcție de deplasările nodale utilizând *funcții de formă*. De obicei, câmpul de deplasări necunoscut din interiorul unui element este interpolat printr-o distribuție liniară. Această aproximare devine tot mai precisă pe măsură ce modelul conține mai multe elemente. La o bară fără sarcini între noduri interpolarea liniară este exactă. Compatibilitatea elementelor adiacente impune doar o continuitate C^0 . Deplasările trebuie să fie continue la granița dintre elemente.

La bare cu sarcini distribuite, deplasările corecte sunt descrise de polinoame de grad superior. Utilizarea acestora implică adăugarea unor *noduri interioare*. Totuși, în practică se utilizează funcții de formă liniare și elemente cu două noduri, fără sarcini între noduri. Aceasta implică înlocuirea sarcilor distribuite prin forțe echivalente aplicate la noduri. Aceste *forțe cinematic echivalente* se determină, folosind funcții de formă corespunzătoare, din condiția să efectueze același lucru mecanic ca și sarcinile reale. În continuare se stabilesc expresiile matricii de rigiditate a unui element și vectorilor forțelor nodale.

4.1 Elemente de bară în plan

Barele sunt elemente de structură utilizate pentru modelarea grinzilor cu zăbrele, cablurilor, lanțurilor și frânghiilor. Dimensiunea longitudinală a acestora este mult mai mare decât dimensiunile transversale. Barele sunt solicitate doar de forțe axiale. Ele sunt modelate local cu elemente cu un grad de libertate pe nod.

4.1.1 Ecuația diferențială de echilibru

Într-o bară subțire, cu aria secțiunii transversale A și modulul de elasticitate E , apar deplasări axiale $u = u(x)$ produse de sarcini axiale $p(x)$. Dimensiunile lui p sunt forță/lungime. În secțiunea $x + dx$ deplasările sunt $u + du$.

Alungirea specifică axială este egală cu derivata deplasării

$$\varepsilon_x = du/dx. \quad (4.1)$$

Tensiunile normale se calculează din legea lui Hooke

$$\sigma_x = E du/dx, \quad (4.2)$$

unde E este modulul de elasticitate longitudinal al materialului.

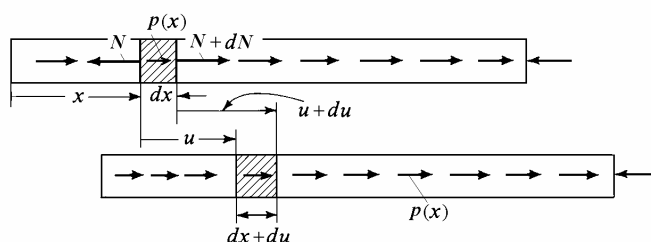


Fig. 4.1

Forța axială interioară este

$$N = A\sigma_x = EA \frac{du}{dx}. \quad (4.3)$$

Ecuția de echilibru a unui element de bară de lungime infinit mică dx (fig. 4.1) este $dN + p dx = 0$,

$$\frac{dN}{dx} + p(x) = 0,$$

sau, înlocuind (4.3),

$$EA \frac{d^2u}{dx^2} = -p(x). \quad (4.4)$$

4.1.2 Coordonate și funcții de formă pentru elementul *truss*

Se consideră un element de bară cu două noduri, articulat la capete, în sistemul de coordonate *local*, cu axa Ox în lungul elementului. Nodurile sunt numerotate convenabil 1 și 2, coordonatele lor în sistemul de referință *fizic* (cartezian) fiind x_1 și respectiv x_2 (fig. 4.2, a).

Se definește un sistem de referință *intrinsec* sau *natural* care permite precizarea poziției unui punct din interiorul elementului printr-o coordonată adimensională

$$r = \frac{2}{x_2 - x_1} \left(x - \frac{x_1 + x_2}{2} \right), \quad (4.5)$$

astfel încât $r = -1$ la nodul 1 și $r = +1$ la nodul 2 (fig. 4.2, b).

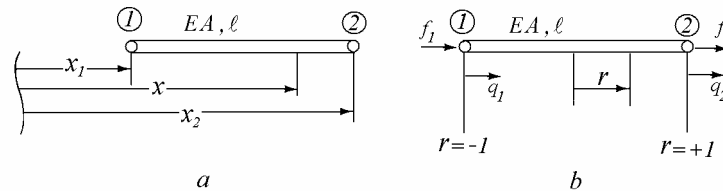


Fig. 4.2

Exprimând coordonatele *fizice* în funcție de coordonatele *naturale* rezultă

$$x = N_1(r) x_1 + N_2(r) x_2, \quad (4.6)$$

unde

$$N_1(r) = \frac{1}{2}(1-r) \text{ și } N_2(r) = \frac{1}{2}(1+r) \quad (4.7)$$

pot fi considerate *funcții de interpolare geometrică*. Graficele acestor funcții sunt prezentate în figurile 4.3, a, b. Funcțiile au valoarea 1 la nodul cu același indice și valoarea zero la celălalt nod.

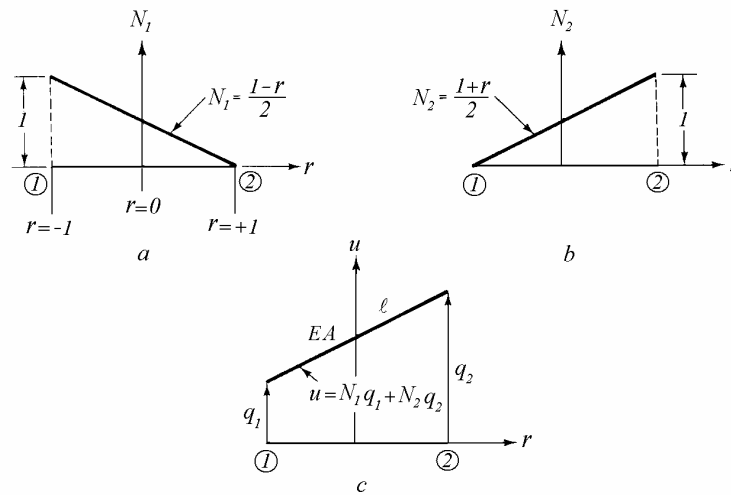


Fig. 4.3

4.1.3 Bara fără sarcini între capete

Pentru o bară de secțiune constantă neîncărcată între capete, $p = 0$, $d^2u/dx^2 = 0$, $du/dx = const.$, câmpul de deplasări în interiorul elementului poate fi exprimat printr-un polinom liniar

$$u(x) = a + bx. \quad (4.8)$$

Cele două constante de integrare pot fi determinate în funcție de deplasările nodale și geometria elementului. Cu $q_1 = a + bx_1$ la nodul 1 și $q_2 = a + bx_2$ la nodul 2, expresia (4.8) devine

$$u = \frac{q_2 - q_1}{x_2 - x_1} x + \frac{q_1 x_2 - q_2 x_1}{x_2 - x_1}. \quad (4.9)$$

Relația (4.9) se mai scrie

$$u = \frac{-x + x_2}{x_2 - x_1} q_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} q_2,$$

sau, utilizând (4.5),

$$u = \frac{1-r}{2} q_1 + \frac{1+r}{2} q_2.$$

Deplasarea unui punct din interiorul elementului poate fi exprimată în funcție de deplasările nodale q_1 și q_2 sub forma

$$u = N_1(r) q_1 + N_2(r) q_2, \quad (4.10)$$

unde $N_1(r) = \frac{1}{2}(1-r)$ și $N_2(r) = \frac{1}{2}(1+r)$ sunt *funcțiile de formă* ale elementului.

Forma polinomială (4.6) este mai simplă, dar constantele de integrare, a și b , nu au semnificație fizică directă. Dezvoltarea nodală (4.10) este mai complicată, însă constantele de integrare, q_1 și q_2 , sunt deplasări nodale.

În formă matricială

$$u = \sum_{i=1}^2 N_i q_i = [N] \{q^e\}, \quad (4.11)$$

unde

$$[N] = [N_1 \quad N_2] \quad \text{și} \quad \{q^e\} = \{q_1 \quad q_2\}^T. \quad (4.12)$$

În acest mod, deplasarea oricărui punct din interiorul unui element poate fi calculată înmulțind matricea funcțiilor de formă cu vectorul deplasărilor nodale.

În relația (4.11), $\{q^e\}$ este vectorul *deplasărilor nodale ale elementului* și $[N]$ este vectorul linie al *funcțiilor de interpolare a deplasărilor*, denumite și *funcții de formă*. Se poate verifica ușor că $u = q_1$ la nodul 1, $u = q_2$ la nodul 2 iar deplasarea u variază liniar (fig. 4.3, c).

Relațiile (4.6) și (4.10) arată că atât geometria elementului cât și câmpul de deplasări sunt interpolate utilizând aceleași funcții de formă, procedeu denumit formularea *izoparametrică*.

4.1.4 Matricea de rigiditate a unui element în coordonate locale

Alungirile specifice pot fi exprimate prin funcțiile de formă

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} = \frac{d}{dx} [N] \{q^e\} = [B] \{q^e\} \quad (4.13)$$

unde

$$[B] = \frac{d}{dx} [N] \quad (4.14)$$

este vectorul linie al derivatelor funcțiilor de formă, denumit în general *matricea deformații specifice - deplasări* a elementului. Acest vector reprezintă alungirea specifică în orice punct produsă de o deplasare nodală egală cu unitatea.

Transformarea de la x la r în expresia (4.5) conduce prin derivare la

$$dx = \frac{x_2 - x_1}{2} dr = \frac{\ell_e}{2} dr, \quad (4.15)$$

unde $-1 \leq r \leq +1$ iar lungimea elementului este $\ell_e = |x_2 - x_1|$.

Energia de deformație a elementului U_e este

$$U_e = \frac{1}{2} \int_e \sigma_x \varepsilon_x dV = \frac{1}{2} \int_e E_e \varepsilon_x^2 dV. \quad (4.16)$$

Înlocuind (4.13) în (4.16) se obține

$$U_e = \frac{1}{2} \{q^e\}^T \underbrace{\int_e [B]^T E_e [B] dV}_{V_e} \{q^e\}. \quad (4.17)$$

Expresia de mai sus are forma

$$U_e = \frac{1}{2} \{q^e\}^T [k^e] \{q^e\}, \quad (4.18)$$

unde *matricea de rigiditate a elementului* $[k^e]$ este

$$[k^e] = \int_{V_e} [B]^T E_e [B] dV. \quad (4.19)$$

Această formă arată că matricea $[k^e]$ este simetrică.

Exprimată prin funcțiile de formă

$$[k^e] = E_e A_e \int_{\ell_e} \left[\frac{dN}{dx} \right]^T \left[\frac{dN}{dx} \right] dx. \quad (4.20)$$

Deoarece $\frac{dN}{dx} = \frac{dN}{dr} \frac{dr}{dx} = \frac{2}{\ell_e} \frac{dN}{dr}$, se poate scrie

$$[k_e] = \frac{2E_e A_e}{\ell_e} \int_{-1}^{+1} \left[\frac{dN}{dr} \right]^T \left[\frac{dN}{dr} \right] dr. \quad (4.21)$$

Înlocuind $\frac{dN_1}{dr} = -\frac{1}{2}$ și $\frac{dN_2}{dr} = +\frac{1}{2}$, expresia (4.21) devine

$$[k^e] = \frac{2E_e A_e}{\ell_e} \int_{-1}^{+1} \begin{Bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} dr$$

sau

$$[k^e] = \frac{E_e A_e}{\ell_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

care are forma (3.6).

4.1.5 Bara cu sarcini între capete

La o bară cu secțiunea constantă, încărcată cu o sarcină uniform distribuită, $p = const.$, $d^2u/dx^2 = const.$, câmpul de deplasări în interiorul elementului poate fi exprimat printr-un polinom de gradul doi

$$u(x) = a + bx + cx^2. \quad (4.23)$$

Cele trei constante de integrare, a , b și c , trebuie determinate din trei condiții la limită. Aceasta se poate realiza utilizând un element cu trei noduri, adăugând un nod la mijlocul elementului (fig. 4.4, a).

În cazul unei sarcini axiale distribuite liniar (de ex. la o bară în rotație cu viteză unghiulară constantă în jurul unui capăt, solicitată de o sarcină centrifugală proporțională cu distanța la centrul de rotație), câmpul de deplasări este descris de un polinom de gradul trei, care conține patru constante de integrare (Exemplul 4.8).

Pentru o soluție exactă, trebuie utilizat un element cu patru noduri (prin adăugarea a două noduri interioare). În practică se adoptă un câmp de deplasări liniar, adică un element cu două noduri, înlocuind sarcina reală distribuită liniar prin forțe nodale echivalente. Rezultă un element fără sarcini între noduri care poate fi descris prin funcții de formă liniare.

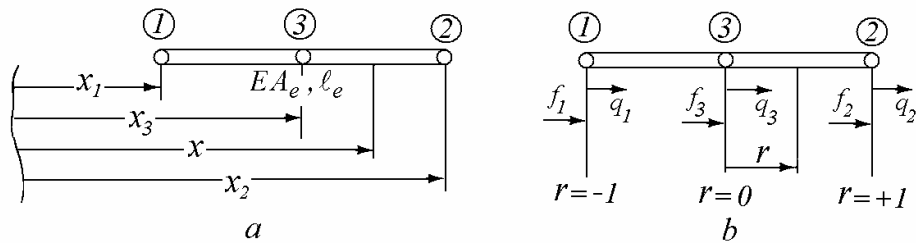


Fig. 4.4

Fie elementul pătratic cu trei noduri din fig. 4.4, a, cu nodul 3 la mijloc. Coordonatele nodale sunt x_1 , x_2 , x_3 , iar vectorul deplasărilor nodale ale elementului este $\{q^e\}^T = \{q_1 \ q_2 \ q_3\}^T$. Sistemul de coordonate x este transpus în sistemul de coordonate r , prin transformarea

$$r = \frac{2(x - x_3)}{x_2 - x_1}. \quad (4.24)$$

Rezultă că $r = -1$, 0 , și $+1$ la nodurile 1, 3, și 2 (fig. 4.4, b).

Deplasările în interiorul elementului pot fi exprimate în funcție de cele trei deplasări nodale q_1 , q_2 , și q_3

$$u = N_1(r) q_1 + N_2(r) q_2 + N_3(r) q_3, \quad (4.25)$$

unde funcțiile de formă pătratice N_i ($i = 1, 2, 3$) au forma

$$\begin{aligned} N_1(r) &= -\frac{1}{2} r (1-r), & N_2(r) &= \frac{1}{2} r (1+r), \\ N_3(r) &= (1+r)(1-r). \end{aligned} \quad (4.26)$$

Graficele funcțiilor de formă (4.26) sunt prezentate în fig. 4.5. Ele au valoarea 1 la la nodul cu același indice și valoarea zero la celelele noduri. Aceasta este o proprietate generală a funcțiilor de formă.

Expresiile funcțiilor de formă pot fi scrise direct, după cum urmează. De exemplu, deoarece $N_1 = 0$ la $r = 0$ și $r = 1$, funcția N_1 trebuie să conțină produsul $r(1-r)$ în care apare membrul stâng al ecuațiilor liniilor verticale care trec prin nodurile 3 și 2. Deci N_1 are forma $N_1 = Cr(1-r)$. Constanta C se obține din condiția ca $N_1 = 1$ la $r = -1$, de unde rezultă $C = -1/2$, ceea ce conduce la expresia din (4.26).

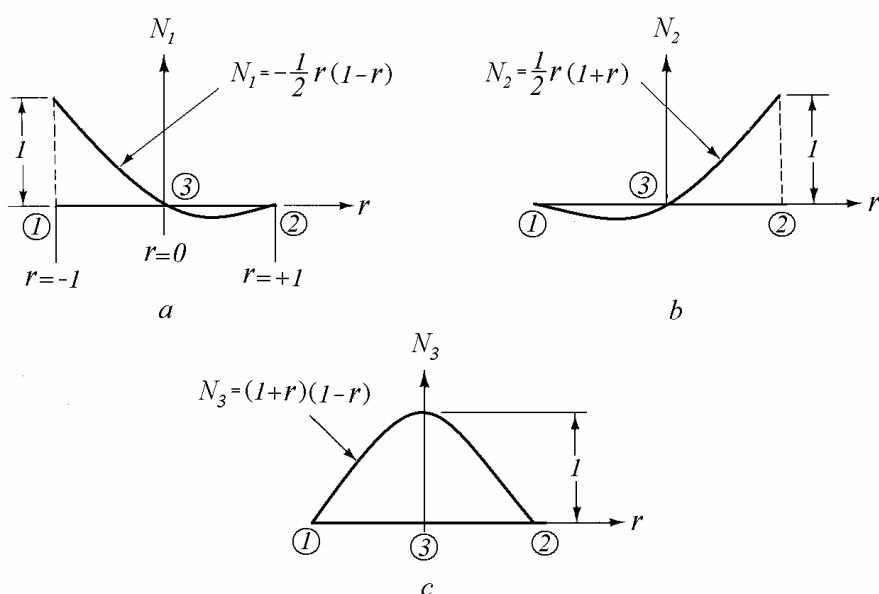


Fig. 4.5

Câmpul de deplasări din interiorul unui element se scrie matricial

$$u = \sum_{i=1}^3 N_i q_i = [N] \{q^e\}, \quad (4.27)$$

unde

$$[N] = [N_1 \quad N_2 \quad N_3] \quad \text{și} \quad \{q^e\} = \{q_1 \quad q_2 \quad q_3\}^T. \quad (4.28)$$

Deplasarea axială în orice punct din interiorul elementului se poate obține înmulțind vectorul linie al funcțiilor de formă cu vectorul deplasărilor nodale, ca în (4.27). Este ușor de verificat că $u = q_1$ la nodul 1, deoarece $N_1 = 1$ și $N_2 = N_3 = 0$. Similar, $u = q_2$ la nodul 2, și $u = q_3$ la nodul 3. Astfel, u este un polinom de gradul doi care trece prin punctele de ordonate q_1 , q_2 și q_3 (fig. 4.6). Acesta se obține prin interpolare, utilizând funcții de formă de gradul doi.

Vectorul linie $[B]$ din relația (4.14) este

$$[B] = \frac{d}{dx}[N] = \frac{d}{dr}[N] \frac{dr}{dx} = \frac{2}{\ell_e} \left[-\frac{1-2r}{2} \quad \frac{1+2r}{2} \quad -2r \right]. \quad (4.29)$$

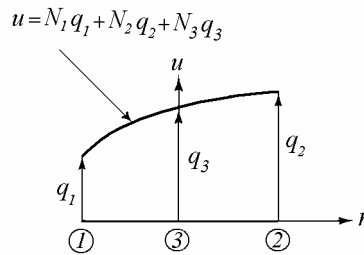


Fig. 4.6

Matricea de rigiditate a elementului (4.19) este

$$[k^e] = \frac{A_e \ell_e}{2} \int_{-1}^{+1} [B]^T E_e [B] dr$$

sau, înlocuind (4.29),

$$[k^e] = \frac{E_e A_e}{3 \ell_e} \begin{bmatrix} 7 & 1 & -8 \\ 1 & 7 & -8 \\ -8 & -8 & 16 \end{bmatrix}. \quad (4.30)$$

4.1.6 Vectorul forțelor nodale ale unui element

Se consideră o sarcină axială $p(x)$, având unități de forță pe unitatea de lungime, distribuită în lungul elementului de bară. Lucrul mecanic al unei astfel de sarcini este

$$W = \int_{\ell_e} u p dx = \int_{\ell_e} u^T p dx. \quad (4.31)$$

Înlocuind (4.11), ecuația (4.31) devine

$$W = \{q^e\}^T \int_{\ell_e} [N]^T p dx. \quad (4.32)$$

Aceasta are forma

$$W = \{q^e\}^T \{f^e\} \quad (4.33)$$

unde vectorul forțelor nodale echivalente al elementului este

$$\{f^e\} = \int_{\ell_e} [N]^T p dx = \frac{\ell_e}{2} \int_{-1}^{+1} [N]^T p dr. \quad (4.34)$$

Pentru un element liniar cu două noduri, dacă sarcina axială este uniform distribuită, $p = const.$, atunci

$$\{f^e\} = \frac{\ell_e}{2} p \int_{-1}^{+1} [N]^T dr \quad (4.35)$$

sau, înlocuind (4.7),

$$\{f^e\} = \frac{p \ell_e}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}. \quad (4.36)$$

În procesul de echivalare, în fiecare nod se aplică o forță $\frac{p \ell_e}{2}$, egală cu jumătate din forța totală care acționează asupra elementului.

Pentru un element pătratic cu trei noduri, dacă $p = const.$, înlocuind funcțiile de formă (4.26) în (4.35), rezultă

$$\{f^e\} = p \ell_e \begin{bmatrix} 1/6 & 1/6 & 2/3 \end{bmatrix}^T. \quad (4.37)$$

4.1.7 Asamblarea matricii de rigiditate și a vectorului forțelor globale

Asamblarea matricii de rigiditate globale la structuri unidimensionale modelate cu bare se face așa cum s-a arătat în § 3.4 - § 3.7 pentru grinzi cu zăbrele.

Fie modelul cu elemente finite cu cinci noduri din fig. 4.7, *a*. Fiecare nod are un singur grad de libertate în direcția x . Deplasările nodale sunt Q_1, Q_2, \dots, Q_5 (fig. 4.7, *b*). Vectorul global al deplasărilor nodale este

$$\{\bar{Q}\} = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 & Q_3 & Q_4 & Q_5 \end{bmatrix}^T.$$

Forțele nodale sunt F_1, F_2, \dots, F_5 . Vectorul global al forțelor nodale este

$$\{\bar{F}\} = \begin{bmatrix} F_1 & F_2 & F_3 & F_4 & F_5 \end{bmatrix}^T.$$

Matricea de rigiditate globală neredusă $[\bar{K}]$ joacă rolul unui factor de proporționalitate între cei doi vectori globali

$$\{\bar{F}\} = [\bar{K}] \{\bar{Q}\}.$$

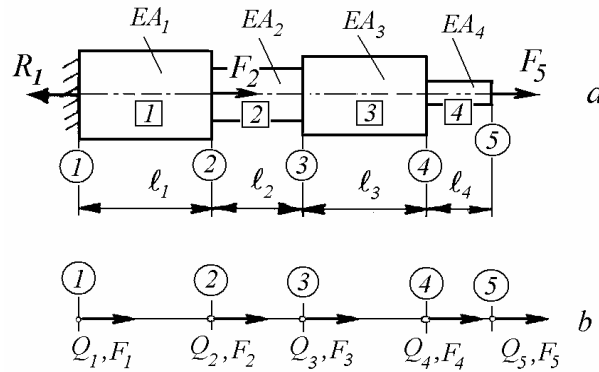


Fig. 4.7

Asamblarea matricii $[\bar{K}]$ din matricile elementelor poate fi explicată energetic. Se consideră, de exemplu, energia de deformație a elementului 3

$$U_3 = \frac{1}{2} \{q^3\}^T [k^3] \{q^3\}$$

sau

$$U_3 = \frac{1}{2} [Q_3 \quad Q_4] \frac{EA_3}{l_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_3 \\ Q_4 \end{Bmatrix}.$$

Aceasta se mai poate scrie în funcție de vectorul global al deplasărilor

$$U_3 = \frac{1}{2} [Q_1 \quad Q_2 \quad Q_3 \quad Q_4 \quad Q_5] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA_3}{l_3} & -\frac{EA_3}{l_3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{EA_3}{l_3} & \frac{EA_3}{l_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \end{Bmatrix}$$

sau

$$U_3 = \frac{1}{2} \{\bar{Q}\}^T [\bar{K}^3] \{\bar{Q}\},$$

unde $[\tilde{K}^3]$ este matricea de rigiditate expandată a elementului 3. Aceasta are dimensiunea matricii de rigiditate globale, iar elementele matricii $[k^3]$ sunt plasate în liniile și coloanele trei și patru ale matricii $[\bar{K}]$.

Energia de deformație a întregii structuri poate fi calculată prin simpla însumare a energiilor de deformație ale elementelor

$$U = \sum_e U_e = \sum_e \frac{1}{2} \{ \bar{Q} \}^T [\tilde{K}^e] \{ \bar{Q} \} = \frac{1}{2} \{ \bar{Q} \}^T \sum_e [\tilde{K}^e] \{ \bar{Q} \}$$

astfel că, la fel ca în (3.27), matricea de rigiditate globală este egală cu suma matricilor de rigiditate expandate ale elementelor

$$[\bar{K}] = \sum_e [\tilde{K}^e] .$$

Aceasta este o explicație algebrică convenabilă a procesului de asamblare, niciodată aplicată în practică. Coeficienții matricilor elementelor $[k^e]$ sunt amplasați în pozițiile corespunzătoare din matricea globală $[\bar{K}]$ prin așa-numita *metodă directă*, pe baza conectivității elementelor. Coeficienții care se suprapun sunt adunați direct, după cum s-a arătat în § 3.4 pentru grinzi cu zăbrele. Baza fizică o reprezintă adunarea energiilor de deformație ale elementelor.

Matricile elementelor pot fi scrise

$$\begin{aligned} [k^1] &= \frac{EA_1}{\ell_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} , & [k^2] &= \frac{EA_2}{\ell_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} , \\ [k^3] &= \frac{EA_3}{\ell_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 4 \end{matrix} , & [k^4] &= \frac{EA_4}{\ell_4} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 5 \end{matrix} . \end{aligned}$$

Deasupra și la dreapta matricilor de rigiditate ale elementelor se indică numerotarea coordonatelor în matricea de rigiditate globală, pe baza tabloului de conectivitate din Tabelul 4.1

Tabelul 4.1

Elementul	Nodul	
	<i>i</i>	<i>j</i>
1	1	2
2	2	3
3	3	4
4	4	5

Rezultă matricea de rigiditate globală neredusă

$$[\bar{K}] = E \begin{bmatrix} \frac{A_1}{\ell_1} & -\frac{A_1}{\ell_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{A_1}{\ell_1} & \frac{A_1}{\ell_1} + \frac{A_2}{\ell_2} & -\frac{A_2}{\ell_2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{A_2}{\ell_2} & \frac{A_2}{\ell_2} + \frac{A_3}{\ell_3} & -\frac{A_3}{\ell_3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{A_3}{\ell_3} & \frac{A_3}{\ell_3} + \frac{A_4}{\ell_4} & -\frac{A_4}{\ell_4} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{A_4}{\ell_4} & \frac{A_4}{\ell_4} \end{bmatrix}.$$

Vectorul global al forțelor nodale este

$$\{\bar{F}\} = [-R_1 \quad F_2 \quad 0 \quad 0 \quad F_5]^T.$$

Ecuțiile finale de echilibru se stabilesc, așa cum se arată în § 3.5, utilizând condiția la limită $Q_1 = 0$. Matricea de rigiditate redusă (nesingulară) se obține eliminând prima linie și prima coloană ale matricii nereduse, iar vectorul redus al forțelor – eliminând primul element. De fapt, acestea nu sunt înlăturate ci memorate pentru calculul ulterior al reacțiunii R_1 . Tensiunile se determină apoi din forțele axiale, utilizând relația (3.41).

4.1.8 Efectul pretensionării

Fie o alungire specifică inițială ε_0 produsă într-un element de bară. Aceasta poate proveni din acțiuni termice sau prin montarea cu prestrângere a barelor datorită erorilor de fabricație.

Relația ‘tensiune – alungire specifică’ în prezența lui ε_0 are forma

$$\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon_0). \quad (4.38)$$

Lucrul mecanic al forțelor nodale exterioare aplicate pentru anularea preîncărcării inițiale datorite lui ε_0 este

$$W = \int_{V_e} \sigma \varepsilon_0 dV = \int_{V_e} \sigma^T \varepsilon_0 dV = \varepsilon_0 E_e A_e \int_{\ell_e} \varepsilon^T dx. \quad (4.39)$$

Înlocuind (4.13), expresia (4.39) devine

$$W = \left\{ q^e \right\}^T \varepsilon_0 E_e A_e \int_{\ell_e} [B]^T dx. \quad (4.40)$$

Aceasta are forma (4.33), unde *vectorul forțelor datorite prestrângerii inițiale* este

$$\left\{ f^e \right\} = \varepsilon_0 E_e A_e \int_{\ell_e} [B]^T dx = \varepsilon_0 E_e A_e \frac{\ell_e}{2} \int_{-1}^{+1} [B]^T dr \quad (4.41)$$

sau

$$\left\{ f^e \right\} = \varepsilon_0 E_e A_e \int_{-1}^{+1} \left[\frac{dN}{dr} \right]^T dr = \varepsilon_0 E_e A_e \frac{\ell_e}{2} \int_{-1}^{+1} \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} dr,$$

deci

$$\left\{ f^e \right\} = \varepsilon_0 E_e A_e \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix}. \quad (4.42)$$

Rezolvând în funcție de deplasările nodale, rezultă tensiunile

$$\sigma^e = E_e \frac{q_2 - q_1}{\ell_e} + (-E_e \varepsilon_0). \quad (4.43)$$

În cazul încărcării termice,

$$\varepsilon_0 = \alpha T, \quad (4.44)$$

unde α este coeficientul de dilatare termică liniară și T variația medie a temperaturii elementului.

4.2 Elemente plane de arbore

Din *Rezistența materialelor* se știe că un arbore cu diametrul d și lungimea ℓ , dintr-un material având modulul de elasticitate transversal G , solicitat de un moment de torsiune M_t se răsuțește cu unghiul $\theta = \frac{M_t \ell}{GI_p}$, unde $I_p = \frac{\pi d^4}{32}$ este momentul de inerție polar al secțiunii transversale a arborelui. *Rigiditatea torsională* a arborelui este $K = \frac{M_t}{\theta} = \frac{GI_p}{\ell}$.

Un element finit de arbore cu două noduri, cu lungimea ℓ și modulul de rigiditate GI_p , este prezentat în fig. 4.8. Momentele de răsucire nodale M_1 și M_2 pot fi exprimate în funcție de rotațiile nodale θ_1 și θ_2 utilizând ecuațiile de echilibru și relațiile între momente și unghiurile de răsucire

$$\begin{aligned} M_1 = -M_2 = K \theta_1 \quad \text{pentru} \quad \theta_2 = 0, \\ M_1 = -M_2 = -K \theta_2 \quad \text{pentru} \quad \theta_1 = 0. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Ecuțiile (4.45) se pot scrie matricial sub forma

$$\begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K & -K \\ -K & K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (4.46)$$

sau, condensat,

$$\{ M^e \} = [k^e] \{ \theta^e \},$$

unde

$$[k^e] = \frac{GI_p}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

este matricea de rigiditate a unui element de arbore.

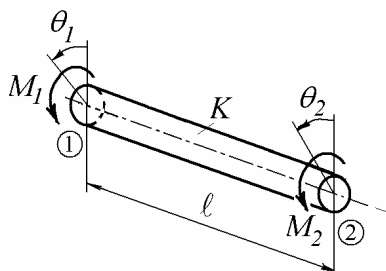


Fig. 4.8

Stabilirea expresiei matricii de rigiditate a arborelui este în principiu identică cea a matricii de rigiditate a unui element de bară solicitat axial. Similaritatea apare datorită faptului că ecuațiile diferențiale de echilibru pentru cele două probleme au aceeași formă matematică. Ecuația diferențială a deplasării la răsucire este

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{M_t}{GI_p}, \quad (4.48)$$

în timp ce pentru deplasarea axială este (4.3)

$$\frac{du}{dx} = \frac{N}{EA}. \quad (4.49)$$

Unghiul de răsucire al unei secțiuni oarecare din interiorul elementului de arbore poate fi exprimat în funcție de rotațiile secțiunilor nodurilor θ_1 și θ_2

$$\theta = N_1(r) \theta_1 + N_2(r) \theta_2 \quad (4.50)$$

unde

$$N_1(r) = \frac{1}{2}(1-r) \text{ și } N_2(r) = \frac{1}{2}(1+r) \quad (4.51)$$

sunt *funcțiile de formă* ale elementului de arbore, aceleași ca cele ale elementului de bară sollicitat axial.

La fel ca în (4.20), matricea de rigiditate a elementului de arbore se poate calcula din relația

$$[k^e] = G_e I_{pe} \int_{\ell_e} \left[\frac{dN}{dx} \right]^T \left[\frac{dN}{dx} \right] dx \quad (4.52)$$

sau

$$[k^e] = \frac{2G_e I_{pe}}{\ell_e} \int_{-1}^{+1} \left[\frac{dN}{dr} \right]^T \left[\frac{dN}{dr} \right] dr \quad (4.53)$$

de unde rezultă

$$[k^e] = \frac{G_e I_{pe}}{\ell_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.54)$$

Matricea (4.54) este utilizată pentru a descrie comportarea la torsiune a elementelor finite de grilaj, după cum expresia (4.22) este folosită pentru a descrie comportarea axială a elementelor finite de grindă înclinată. Când secțiunile transversale nu sunt axial-simetrice, momentul de inerție polar I_p se înlocuiește prin *momentul de inerție la torsiune* I_t .

Exemplul 4.1

La bara din fig. E4.1, având $d = 5 \text{ mm}$, $\ell = 0,2 \text{ m}$, $E = 200 \text{ GPa}$, încărcată cu o forță axială $F = 2 \text{ kN}$, să se determine: a) deplasarea secțiunii 2, b) tensiunile din bare și c) reacțiunile în încastrări.

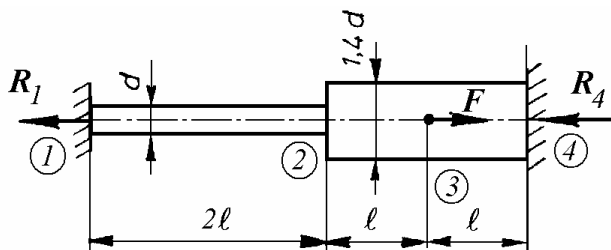


Fig. E4.1

Rezolvare. a) Bara este modelată cu trei elemente finite.

Ariile secțiunilor transversale sunt

$$A_1 = \frac{\pi d^2}{4} = 19,62 \text{ mm}^2, \quad A_2 = A_3 = \frac{\pi (1,4d)^2}{4} = 38,47 \text{ mm}^2.$$

Matricile de rigiditate ale elementelor sunt

$$[k^1] = \frac{2 \cdot 10^5 \cdot 19,62}{400} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 9,81 \cdot 10^3 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \frac{\text{N}}{\text{mm}},$$

$$[k^2] = [k^3] = \frac{2 \cdot 10^5 \cdot 38,47}{200} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 38,47 \cdot 10^3 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \frac{\text{N}}{\text{mm}}.$$

Matricea de rigiditate globală neredusă este

$$[\bar{K}] = 10^3 \begin{bmatrix} 9,81 & -9,81 & 0 & 0 \\ -9,81 & 9,81 + 38,47 & -38,47 & 0 \\ 0 & -38,47 & 38,47 + 38,47 & -38,47 \\ 0 & 0 & -38,47 & 38,47 \end{bmatrix}.$$

Ținând cont de condițiile la limită (gradele de libertate 1 și 4 sunt blocate), ecuațiile de echilibru se pot scrie

$$10^3 \begin{bmatrix} 9,81 & -9,81 & 0 & 0 \\ -9,81 & 48,28 & -38,47 & 0 \\ 0 & -38,47 & 76,94 & -38,47 \\ 0 & 0 & -38,47 & 38,47 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -R_1 \\ 0 \\ 2 \cdot 10^3 \\ -R_4 \end{Bmatrix}.$$

Reținând numai a doua și a treia ecuație, rezultă sistemul

$$10^3 \begin{bmatrix} 48,28 & -38,47 \\ -38,47 & 76,94 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_2 \\ Q_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 2 \cdot 10^3 \end{Bmatrix}$$

cu soluțiile

$$Q_2 = 34,42 \text{ mm}, \quad Q_3 = 43,21 \text{ mm}.$$

b) Reacțiunile se obțin din prima și a patra ecuație

$$R_1 = 9,81 Q_2 = 9,81 \cdot 10^3 \cdot 34,42 = 337,8 \text{ N},$$

$$R_4 = 38,47 Q_3 = 38,47 \cdot 10^3 \cdot 43,21 = 1662,2 \text{ N}.$$

c) Tensiunile sunt

$$\sigma_{12} = E \varepsilon_{12} = E \frac{Q_2 - Q_1}{\ell_1} = E \frac{Q_2}{2\ell} = 2 \cdot 10^5 \frac{34,42}{400} = 17,2 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2},$$

$$\sigma_{23} = E \varepsilon_{23} = E \frac{Q_3 - Q_2}{\ell_2} = E \frac{Q_3 - Q_2}{\ell} = 2 \cdot 10^5 \frac{8,79}{200} = 8,79 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2},$$

$$\sigma_{34} = E \varepsilon_{34} = E \frac{Q_4 - Q_3}{\ell_3} = -E \frac{Q_3}{\ell} = -2 \cdot 10^5 \frac{43,21}{200} = -43,2 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}.$$

Exemplul 4.2

Un suport, constând dintr-o bară de oțel 1 montată fără joc în interiorul unui tub de fontă 2, este solicitat de o forță axială de 60 kN, ca în fig. E4.2. Se consideră $A_1 = 200 \text{ mm}^2$, $A_2 = 800 \text{ mm}^2$, $E_1 = 210 \text{ GPa}$, $E_2 = 120 \text{ GPa}$, $\ell = 0,2 \text{ m}$. Să se determine: a) scurtarea ansamblului, b) tensiunile din fiecare material și c) forțele interioare din bară și tub.

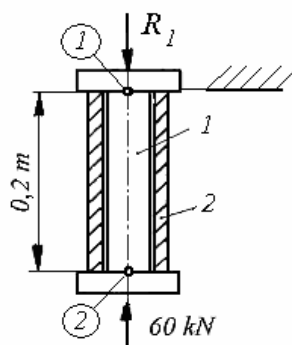


Fig. E4.2

Rezolvare. a) Utilizând un model cu două elemente finite, matricile de rigiditate ale elementelor sunt

$$[k^1] = \frac{2,1 \cdot 10^5 \cdot 200}{200} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 2,1 \cdot 10^5 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \frac{\text{N}}{\text{mm}},$$

$$[k^2] = \frac{1,2 \cdot 10^5 \cdot 800}{200} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 4,8 \cdot 10^5 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \frac{\text{N}}{\text{mm}}.$$

Matricea de rigiditate globală neredusă este

$$[\bar{K}] = 10^5 \begin{bmatrix} 2,1 + 4,8 & -2,1 - 4,8 \\ -2,1 - 4,8 & 2,1 + 4,8 \end{bmatrix} = 6,9 \cdot 10^5 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \frac{\text{N}}{\text{mm}}.$$

Dacă punctul 1 este blocat, ecuațiile de echilibru au forma

$$6,9 \cdot 10^5 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ Q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ -6 \cdot 10^4 \end{Bmatrix},$$

deci

$$Q_2 = -0,087 \text{ mm},$$

deplasare egală cu scurtarea barelor.

b) Tensiunile sunt

$$\sigma^1 = E_1 \varepsilon^1 = E_1 \frac{Q_2 - Q_1}{\ell} = E_1 \frac{Q_2}{\ell} = 2,1 \cdot 10^5 \frac{-0,087}{200} = -91,3 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2},$$

$$\sigma^2 = E_2 \varepsilon^2 = E_2 \frac{Q_2 - Q_1}{\ell} = E_2 \frac{Q_2}{\ell} = 1,2 \cdot 10^5 \frac{-0,087}{200} = -52,14 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}.$$

c) Forțele axiale au valorile

$$N_1 = \sigma^1 A_1 = -91,3 \cdot 200 = -18,26 \text{ kN},$$

$$N_2 = \sigma^2 A_2 = -52,14 \cdot 800 = -41,74 \text{ kN}.$$

Exemplul 4.3

Bara din figura E4.3 este încălzită uniform cu 80°C . Dacă $E = 130 \text{ GPa}$ și $\alpha = 17 \cdot 10^{-6} \text{ grad}^{-1}$, se cere să se determine tensiunile termice.

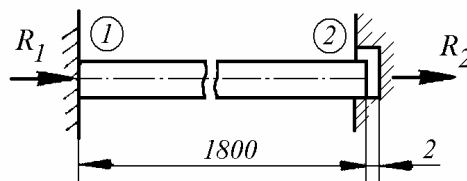


Fig. E4.3

Rezolvare. Întâi se determină dacă prin încălzire bara atinge peretele din dreapta. Dacă peretele n-ar exista, atunci deplasarea punctului 2 ar fi

$$\Delta \ell = \ell \alpha T = 1800 \cdot 17 \cdot 10^{-6} \cdot 80 = 2.448 \text{ mm} > 2 \text{ mm}$$

deci bara atinge peretele.

Notând cu A aria secțiunii transversale, forțele (4.42) sunt

$$\{f_T\} = \alpha T E A \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} = 17 \cdot 10^{-6} \cdot 80 \cdot 1,3 \cdot 10^5 \cdot A \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} = 176,8 \cdot A \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \text{ N.}$$

Matricea de rigiditate este

$$[k] = \frac{1,3 \cdot 10^5 \cdot A}{1800} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \frac{\text{N}}{\text{mm}}.$$

Deoarece punctul I este fix, ecuațiile de echilibru au forma

$$\frac{1,3 \cdot 10^5 \cdot A}{1800} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1 - 176,8A \\ R_2 + 176,8A \end{Bmatrix},$$

de unde se obțin reacțiunile

$$R_1 = 176,8A - 144,4A = 32,4A, \quad R_2 = -32,4A.$$

Tensiunile normale sunt

$$\sigma = \frac{R_2}{A} = -32,4 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}.$$

Exemplul 4.4

O bară de secțiune constantă este fabricată din două materiale diferite, ca în fig. E4.4. Dacă temperatura părții centrale 2-3 crește cu $T^0\text{C}$, se cer tensiunile care apar în bară.

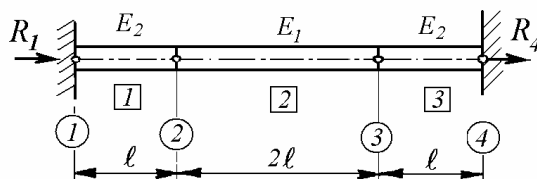


Fig. E4.4

Rezolvare. Bara este modelată cu trei elemente finite *truss*. Matricile de rigiditate ale elementelor sunt

$$[k^1] = [k^3] = \frac{E_2 A}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad [k^2] = \frac{E_1 A}{2l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pentru elementul 2, vectorul forțelor nodale termice este

$$\{f^2\} = \alpha T E_1 A [-1 \quad 1]^T.$$

Utilizând condițiile la limită $Q_1 = Q_4 = 0$, ecuațiile de echilibru pot fi scrise

$$\frac{A}{\ell} \begin{bmatrix} E_2 & -E_2 & 0 & 0 \\ -E_2 & E_2 + \frac{E_1}{2} & -\frac{E_1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{E_1}{2} & \frac{E_1}{2} + E_2 & -E_2 \\ 0 & 0 & -E_2 & E_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ -\alpha T E_1 A \\ \alpha T E_1 A \\ R_4 \end{Bmatrix}.$$

Sistemul format de a doua și a treia ecuație

$$\frac{A}{\ell} \begin{bmatrix} E_2 + \frac{E_1}{2} & -\frac{E_1}{2} \\ -\frac{E_1}{2} & E_2 + \frac{E_1}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_2 \\ Q_3 \end{Bmatrix} = \alpha T E_1 A \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

are soluțiile

$$Q_2 = -\alpha T \ell \frac{E_1}{E_1 + E_2}, \quad Q_3 = \alpha T \ell \frac{E_1}{E_1 + E_2}.$$

Alungirile specifice ale elementelor sunt

$$\varepsilon^1 = \varepsilon^3 = \frac{Q_2}{\ell} = -\frac{Q_4}{\ell} = -\alpha T \frac{E_1}{E_1 + E_2}, \quad \varepsilon_2 = \frac{Q_3 - Q_2}{2\ell} = \alpha T \frac{E_1}{E_1 + E_2}.$$

Tensiunile au expresiile

$$\sigma^1 = \sigma^3 = E_2 \varepsilon^1 = -\alpha T \frac{1}{\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}}, \quad \sigma^2 = E_1 \varepsilon^2 - E_1 \alpha T = -\alpha T \frac{1}{\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}} = \sigma^1.$$

Exemplul 4.5

Un șurub din oțel, cu lungimea activă $\ell = 100 \text{ mm}$ și diametrul $\delta = 10 \text{ mm}$, are filet simplu cu pasul $1,6 \text{ mm}$. Șurubul este montat în interiorul unui tub din cupru cu diametrele $d = 12 \text{ mm}$ și $D = 18 \text{ mm}$ (fig. E4.5, a). Se rotește piulița până se oprește, apoi se strânge un sfert de rotație. Să se determine tensiunile din șurub și tub, dacă la oțel $E_1 = 208 \text{ GPa}$ și la cupru $E_2 = 100 \text{ GPa}$.

Rezolvare. Ansamblul este modelat cu două elemente finite de bară, ca în fig. E4.5, b. Ambele elemente sunt blocate în punctele 1 și 4, deci $Q_1 = Q_4 = 0$.

Problema are o constrângere

$$Q_3 - Q_2 = 0,4 \text{ mm}.$$

În general, astfel de condiții se programează prin *metoda penalităților*. În continuare se dă o rezolvare directă mai simplă.

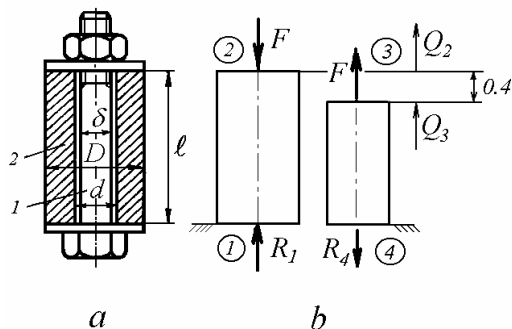


Fig. E4.5

Ariile secțiunilor transversale sunt

$$A_1 = \frac{\pi \delta^2}{4} = 78,54 \text{ mm}^2, \quad A_2 = \frac{\pi (D^2 - d^2)}{4} = 141,37 \text{ mm}^2.$$

Matricile de rigiditate ale elementelor sunt

$$[k^1] = \frac{2,08 \cdot 10^5 \cdot 78,54}{100} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 1,63 \cdot 10^5 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \frac{\text{N}}{\text{mm}},$$

$$[k^2] = \frac{10^5 \cdot 141,37}{100} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 1,41 \cdot 10^5 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \frac{\text{N}}{\text{mm}}.$$

Ecuțiile de echilibru se scriu

$$10^5 \begin{bmatrix} 1,63 & -1,63 & 0 & 0 \\ -1,63 & 1,63 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,41 & -1,41 \\ 0 & 0 & -1,41 & 1,41 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ Q_2 \\ -Q_3 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ -F \\ -F \\ R_4 \end{Bmatrix}.$$

Sistemul format din a doua și a treia ecuație

$$10^5 \begin{bmatrix} 1,63 & 0 \\ 0 & 1,41 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_2 \\ -Q_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -F \\ -F \end{Bmatrix}$$

are soluțiile

$$Q_2 = -\frac{F}{1,63 \cdot 10^5}, \quad Q_3 = \frac{F}{1,41 \cdot 10^5}.$$

Înlocuind aceste valori în relația de constrângere rezultă

$$F \left(\frac{1}{1,63 \cdot 10^5} + \frac{1}{1,41 \cdot 10^5} \right) = 0,4,$$

sau

$$F = 30314 \text{ N}.$$

Tensiunile au valorile

$$\sigma_1 = \frac{F}{A_1} = \frac{30316}{78,54} = 386 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2},$$

$$\sigma_2 = -\frac{F}{A_2} = -\frac{30316}{141,37} = -214,5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}.$$

Exemplul 4.6

La bara din figura E4.6, cu secțiunea transversală variabilă liniar $A(x) = A_0 \left(1 + \frac{x}{2\ell} \right)$, să se calculeze deplasarea capătului liber sub acțiunea forței F , utilizând două elemente finite de bară cu secțiune variabilă.

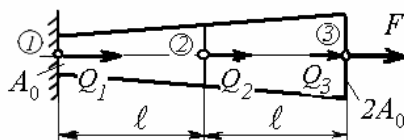


Fig. E4.6

Rezolvare. Matricea de rigiditate a unui element de bară cu secțiunea transversală variabilă este

$$[k^e] = \frac{E}{\ell_e^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \int_{\ell_e} A dx.$$

La bara din fig. E4.6, împărțită în două elemente finite de lungime egală, matricile de rigiditate ale elementelor sunt

$$[k^1] = \frac{E}{\ell^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} A_0 \int_0^\ell \left(1 + \frac{x}{2\ell}\right) dx = \frac{5EA_0}{4\ell} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$[k^2] = \frac{E}{\ell^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} A_0 \int_\ell^{2\ell} \left(1 + \frac{x}{2\ell}\right) dx = \frac{7EA_0}{4\ell} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Înlocuind $Q_1 = 0$, ecuațiile de echilibru pot fi scrise

$$\frac{EA_0}{4\ell} \begin{bmatrix} 5 & -5 & 0 \\ -5 & 12 & -7 \\ 0 & -7 & 7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_2 \\ Q_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ 0 \\ F \end{Bmatrix}.$$

Rezolvând sistemul format de a doua și a treia ecuație

$$\frac{EA_0}{4\ell} \begin{bmatrix} 12 & -7 \\ -7 & 7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_2 \\ Q_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F \end{Bmatrix},$$

se obține

$$Q_2 = \frac{4}{5} \frac{F\ell}{EA_0}, \quad Q_3 = \frac{48}{35} \frac{F\ell}{EA_0}.$$

Deoarece s-a admis o variație aproximativă liniară a câmpului de deplasări, elementele finite au deformații specifice constante, deci rezultă o variație în trepte a tensiunilor în lungul barei.

Exemplul 4.7

Să se stabilească matricea de rigiditate a barei din fig. E4.7, condensând Q_3 pe baza condiției $F_3 = 0$. Să se modeleze bara cu: a) două elemente liniare cu două noduri; b) un element pătratic cu trei noduri. Să se comenteze rezultatele.

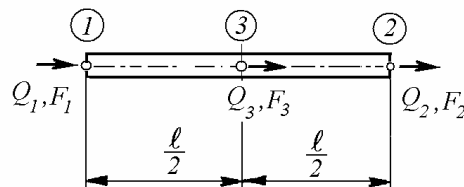


Fig. E4.7

Rezolvare. a) Fie bara modelată cu două elemente liniare. Matricile de rigiditate ale elementelor sunt

$$[k^1] = [k^2] = \frac{2EA}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Matricea de rigiditate globală neredusă este

$$[\bar{K}] = \frac{2EA}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ecuțiile de echilibru se pot scrie

$$\frac{2EA}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}.$$

Pentru $F_3 = 0$, din ultima ecuație rezultă

$$Q_3 = \frac{Q_1 + Q_2}{2} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix}$$

ceea ce presupune un câmp liniar de deplasări în interiorul barei.

Primele două ecuații au forma

$$\frac{2EA}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix} + \frac{2EA}{\ell} \begin{Bmatrix} -1 \\ -1 \end{Bmatrix} Q_3 = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$$

și după înlocuirea lui Q_3 devin

$$\frac{2EA}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix} + \frac{2EA}{\ell} \begin{Bmatrix} -1 \\ -1 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$$

ceea ce se mai poate scrie

$$\frac{EA}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix},$$

unde membrul stâng conține matricea de rigiditate a elementului liniar cu două noduri.

b) Fie bara modelată cu un singur element de bară pătratic cu trei noduri. Ecuțiile de echilibru se pot scrie

$$\frac{EA}{3\ell} \begin{bmatrix} 7 & 1 & -8 \\ 1 & 7 & -8 \\ -8 & -8 & 16 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}.$$

Condensând Q_3 din condiția $F_3 = 0$ rezultă

$$Q_3 = \frac{Q_1 + Q_2}{2} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix}.$$

Primele două ecuații se scriu

$$\frac{EA}{3\ell} \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix} + \frac{EA}{3\ell} \begin{Bmatrix} -8 \\ -8 \end{Bmatrix} Q_3 = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$$

și după înlocuirea lui Q_3

$$\frac{EA}{3\ell} \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix} + \frac{EA}{3\ell} \begin{Bmatrix} -8 \\ -8 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$$

ceea ce se poate rescrie

$$\frac{EA}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix},$$

unde matricea din membrul stâng este chiar matricea unui element de bară stabilită cu ajutorul unor polinoame liniare.

c) *Observație.* Înlocuind

$$\begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix}$$

în expresia energiei de deformație (4.18) rezultă

$$U_e = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 & Q_3 \end{bmatrix} \frac{EA}{3\ell} \begin{bmatrix} 7 & 1 & -8 \\ 1 & 7 & -8 \\ -8 & -8 & 16 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{Bmatrix},$$

$$U_e = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \end{bmatrix} \frac{EA}{3\ell} \begin{bmatrix} 7 & 1 & -8 \\ 1 & 7 & -8 \\ -8 & -8 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix},$$

$$U_e = \frac{1}{2} [Q_1 \quad Q_2] \frac{EA}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix}.$$

Pentru $p = \text{const.}$, lucrul mecanic al forțelor nodale este

$$W^e = [Q_1 \quad Q_2 \quad Q_3] \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = [Q_1 \quad Q_2 \quad Q_3] \begin{Bmatrix} 1/6 \\ 1/6 \\ 2/3 \end{Bmatrix} p \ell_e,$$

$$W^e = [Q_1 \quad Q_2] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1/6 \\ 1/6 \\ 2/3 \end{Bmatrix} p \ell_e = [Q_1 \quad Q_2] \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{p \ell_e}{2}.$$

Se poate trage concluzia că introducerea termenului de gradul doi în ecuația (4.23) nu modifică matricea de rigiditate și vectorul forțelor utilizate în mod curent. Totdeauna când funcțiile admisibile, utilizate la descrierea câmpului de deplasări, formează soluția omogenă completă a ecuației diferențiale de echilibru (4.4), matricea de rigiditate rezultată și vectorul forțelor echivalente sunt exacte. Aceasta deoarece, așa cum se arată în capitolul următor, doar partea omogenă soluției conține parametrii independenți în raport cu care se minimizează energia potențială totală. Parametrii care apar în soluția particulară sunt prescriși și nu intervin în procesul de minimizare.

Deoarece matricea de rigiditate și vectorul forțelor sunt exacte, rezultă că și deplasările *nodale* sunt exacte. Totuși, deplasările *în interiorul* elementelor depind de soluția generală (omogenă plus particulară). Formularea convențională bazată pe un polinom liniar conduce la valori exacte ale deplasărilor în interiorul elementelor numai atunci când $p = 0$. În cazul când $p = \text{const.}$, deplasările exacte în interiorul elementelor se pot obține din relația (4.25). Totuși, înaintea utilizării relației (4.25), variabila Q_3 trebuie determinată pe baza deplasărilor nodale (calculate pentru elementul liniar convențional), dintr-o ecuație de legătură între Q_3 și celelate variabile nodale, obținută prin minimizarea energiei potențiale totale în raport cu Q_3 la nivelul elementului.

Exemplul 4.8

Se consideră un braț de robot cu secțiunea constantă, care se rotește cu viteza unghiulară constantă $\omega = 30 \text{ rad/s}$ (fig. E4.8, a). Să se determine distribuția tensiunilor normale din bară datorite sarcinii centrifugale utilizând: a) două elemente pătrate, și b) trei elemente liniare.

Rezolvare. Asupra barei acționează o sarcină centrifugală axială distribuită liniar

$$p(x) = p_0 \frac{x}{\ell}$$

unde $p_0 = \rho A \ell \omega^2$.

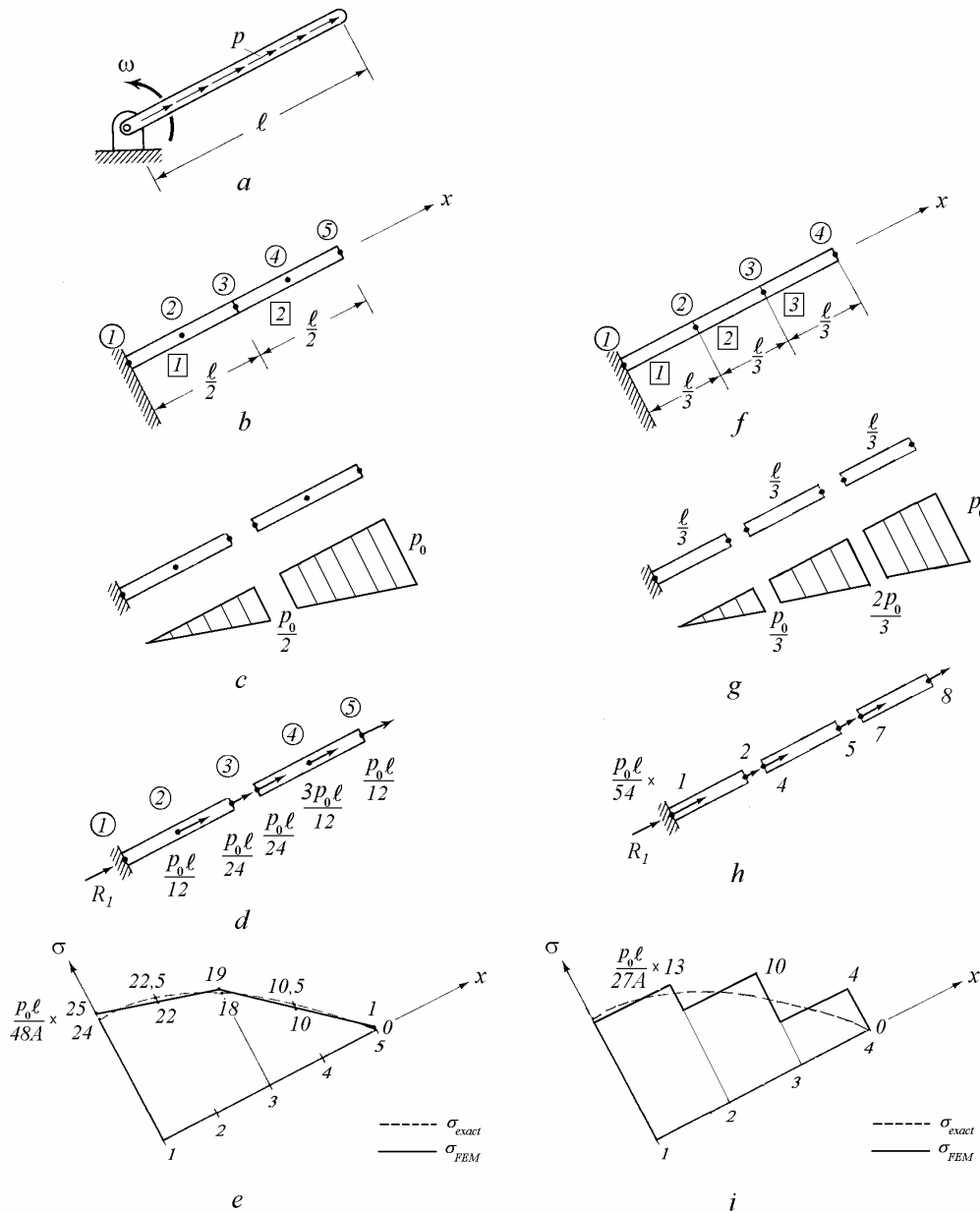


Fig. E4.8

a) În fig. E4.8, *b* se prezintă un model compus din două elemente finite pătrate. Modelul are patru grade de libertate.

Matricile de rigiditate ale elementelor sunt

$$[k^1] = [k^2] = \frac{2EA}{3\ell} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix}.$$

Matricea de rigiditate globală neredusă este

$$[\bar{K}] = \frac{2EA}{3\ell} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 & 0 & 0 \\ -8 & 16 & -8 & 0 & 0 \\ 1 & -8 & 7+7 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & 16 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & -8 & 7 \end{bmatrix}.$$

Sarcina axială care acționează asupra celor două elemente poate fi descompusă ca în fig. E4.8, *c*. Forțele nodale, echivalente cu o sarcină distribuită liniar, se calculează cu relația (4.34)

$$\{f^e\} = \int_{\ell_e} [N]^T p dx = p_0 \ell_e \int_0^1 \begin{Bmatrix} (1-2\xi)(1-\xi) \\ -\xi(1-2\xi) \\ 4\xi(1-\xi) \end{Bmatrix} \xi d\xi = p_0 \ell_e \begin{Bmatrix} 0 \\ 1/6 \\ 1/3 \end{Bmatrix},$$

unde $\xi = x/\ell_e$ și funcțiile de formă (4.26) sunt definite pe un interval $[0, 1]$. În cazul încărcării cu o sarcină uniform distribuită acestea sunt date de (4.37).

Sarcinile distribuite din fig. E4.8, *c* sunt înlocuite prin forțele nodale echivalente arătate în fig. E4.8, *d*. Vectorii forțelor nodale ale elementelor sunt

$$\{f^1\} = \frac{P_0\ell}{12} [0 \ 1 \ 1/2]^T, \quad \{f^2\} = \frac{P_0\ell}{12} [1/2 \ 3 \ 1]^T.$$

Utilizând condiția la limită $Q_1 = 0$, ecuațiile de echilibru pot fi scrise

$$\frac{2EA}{3\ell} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 & 0 & 0 \\ -8 & 16 & -8 & 0 & 0 \\ 1 & -8 & 14 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & 16 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & -8 & 7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ p_0\ell/12 \\ p_0\ell/24 + p_0\ell/24 \\ 3p_0\ell/12 \\ p_0\ell/12 \end{Bmatrix}.$$

Eliminând prima linie și prima coloană, se obține matricea de rigiditate globală redusă și vectorul redus al forțelor globale, care conduc la soluția

$$Q_2 = \frac{47}{384} \frac{p_0 \ell^2}{EA}, \quad Q_3 = \frac{88}{384} \frac{p_0 \ell^2}{EA}, \quad Q_4 = \frac{117}{384} \frac{p_0 \ell^2}{EA}, \quad Q_5 = \frac{128}{384} \frac{p_0 \ell^2}{EA}.$$

Deplasările nodale pot fi comparate cu soluția exactă

$$u(x) = \frac{p_0 \ell^2}{2EA} \left(\frac{x}{\ell} - \frac{x^3}{3\ell^3} \right). \quad (a)$$

Se obține

$$u\left(\frac{\ell}{4}\right) = \frac{47}{384} \frac{p_0 \ell^2}{2EA}, \quad u\left(\frac{\ell}{2}\right) = \frac{11}{48} \frac{p_0 \ell^2}{2EA}, \quad u\left(\frac{3\ell}{4}\right) = \frac{117}{384} \frac{p_0 \ell^2}{2EA}, \quad u(\ell) = \frac{1}{3} \frac{p_0 \ell^2}{2EA}.$$

Valorile deplasărilor nodale calculate cu metoda elementelor finite sunt exacte. Aceasta se datorește echivalării nodale a forțelor. În timp ce deplasările nodale sunt exacte, deplasările în interiorul elementelor sunt aproximative deoarece distribuția *cubică* exactă (a) este înlocuită printr-o lege *pătratică*.

Vectorul linie $[B]$ care exprimă deformațiile specifice în funcție de deplasări în (4.29) este dat de

$$[B] = \frac{d}{dx}[N] = \frac{1}{\ell} [-3 + 4\xi \quad -1 + 4\xi \quad 4 - 8\xi].$$

Alungirile specifice sunt

$$\varepsilon^1 = \frac{2}{\ell} (N_2' Q_3 + N_3' Q_2) = \frac{p_0 \ell}{48EA} (25 - 6\xi),$$

$$\varepsilon^2 = \frac{2}{\ell} (N_1' Q_3 + N_2' Q_5 + N_3' Q_4) = \frac{p_0 \ell}{48EA} (19 - 18\xi),$$

de unde rezultă următoarele valori nodale

$$\varepsilon_1 = \frac{25}{48} \frac{p_0 \ell}{EA}, \quad \varepsilon_2 = \frac{22}{48} \frac{p_0 \ell}{EA}, \quad \varepsilon_3 = \frac{19}{48} \frac{p_0 \ell}{EA}, \quad \varepsilon_4 = \frac{10}{48} \frac{p_0 \ell}{EA}, \quad \varepsilon_5 = \frac{1}{48} \frac{p_0 \ell}{EA}.$$

Tensiunile normale corespunzătoare sunt

$$\sigma_1 = \frac{25}{48} \frac{p_0 \ell}{A}, \quad \sigma_2 = \frac{22}{48} \frac{p_0 \ell}{A}, \quad \sigma_3 = \frac{19}{48} \frac{p_0 \ell}{A}, \quad \sigma_4 = \frac{10}{48} \frac{p_0 \ell}{A}, \quad \sigma_5 = \frac{1}{48} \frac{p_0 \ell}{A}.$$

Tensiunile pot fi comparate cu soluția exactă

$$\sigma(x) = \frac{p_0 \ell}{2A} \left(1 - \frac{x^2}{\ell^2} \right), \quad (b)$$

din care se obțin următoarele valori la noduri

$$\sigma(0) = \frac{24}{48} \frac{p_0 \ell}{A}, \quad \sigma\left(\frac{\ell}{4}\right) = \frac{22.5}{48} \frac{p_0 \ell}{A},$$

$$\sigma\left(\frac{\ell}{2}\right) = \frac{18}{48} \frac{p_0 \ell}{A}, \quad \sigma\left(\frac{3\ell}{4}\right) = \frac{10.5}{48} \frac{p_0 \ell}{A}, \quad \sigma(\ell) = 0.$$

În fig. E4.8, *e* se prezintă o diagramă a distribuției tensiunilor.

b) În fig. E4.8, *f* se prezintă un model compus din trei elemente finite liniare. Modelul are patru grade de libertate.

Matricile de rigiditate ale elementelor sunt

$$[k^1] = [k^2] = [k^3] = \frac{3EA}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sarcina axială care acționează asupra celor trei elemente poate fi descompusă ca în fig. E4.8, *g*. Forțele nodale, echivalente cu o sarcină distribuită liniar, se calculează cu relația (4.34). Dacă p_1 și p_2 sunt intensitățile unei sarcini distribuite liniar la nodurile 1 și respectiv 2, atunci

$$p(\xi) = p_1 + (p_2 - p_1)\xi,$$

$$\{f^e\} = \int_{\ell_e} [N]^T p dx = \ell_e \int_0^1 \begin{Bmatrix} 1-\xi \\ \xi \end{Bmatrix} [p_1 + (p_2 - p_1)\xi] d\xi = \frac{\ell_e}{6} \begin{Bmatrix} 2p_1 + p_2 \\ p_1 + 2p_2 \end{Bmatrix},$$

unde $\xi = x/\ell_e$ și funcțiile de formă (4.26) sunt definite pe un interval $[0, 1]$. Pentru $p_1 = p_2 = p$, forțele nodale se calculează din relația (4.36).

Sarcinile distribuite din fig. E4.8, *g* sunt înlocuite prin forțele nodale echivalente din fig. E4.8, *h*. Vectorii forțelor nodale ale elementelor sunt

$$\{f^1\} = \frac{p_0 \ell}{54} [1 \ 2]^T, \quad \{f^2\} = \frac{p_0 \ell}{54} [4 \ 5]^T, \quad \{f^3\} = \frac{p_0 \ell}{54} [7 \ 8]^T.$$

Utilizând condiția la limită $Q_1 = 0$, ecuațiile de echilibru pot fi scrise

$$\frac{3EA}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{Bmatrix} = \frac{p_0 \ell}{54} \begin{Bmatrix} 1 + \frac{54R_1}{p_0 \ell} \\ 6 \\ 12 \\ 8 \end{Bmatrix}.$$

Din ultimele trei ecuații se obține

$$Q_2 = \frac{13}{81} \frac{p_0 \ell^2}{EA}, \quad Q_3 = \frac{23}{81} \frac{p_0 \ell^2}{EA}, \quad Q_4 = \frac{27}{81} \frac{p_0 \ell^2}{EA} = \frac{1}{3} \frac{p_0 \ell^2}{EA}.$$

Vectorul linie $[B]$, care leagă deformațiile specifice de deplasări în (4.29), este dat de

$$[B] = \frac{d}{dx}[N] = \frac{1}{\ell_e} [-1 \quad 1].$$

Alungirile specifice sunt

$$\varepsilon^1 = \frac{3}{\ell} Q_2 = \frac{13}{27} \frac{p_0 \ell}{EA}, \quad \varepsilon^2 = \frac{3}{\ell} (Q_3 - Q_2) = \frac{10}{27} \frac{p_0 \ell}{EA}, \quad \varepsilon^3 = \frac{3}{\ell} (Q_4 - Q_3) = \frac{4}{27} \frac{p_0 \ell}{EA},$$

fiind constante în interiorul fiecărui element.

Tensiunile normale corespunzătoare sunt

$$\sigma^1 = \frac{13}{27} \frac{p_0 \ell}{A}, \quad \sigma^2 = \frac{10}{27} \frac{p_0 \ell}{A}, \quad \sigma^3 = \frac{4}{27} \frac{p_0 \ell}{A}.$$

În fig. E4.8, i acestea sunt comparate cu cele calculate din relația (b).

Exemplul 4.9

Să se arate că funcțiile de formă pentru un element de bară cubic cu patru noduri, în coordonate locale, au forma

$$\begin{aligned} N_1(r) &= -\frac{9}{16} (1-r) \left(\frac{1}{3} + r \right) \left(\frac{1}{3} - r \right), \\ N_2(r) &= \frac{27}{16} (1+r)(1-r) \left(\frac{1}{3} - r \right), \\ N_3(r) &= \frac{27}{16} (1+r)(1-r) \left(\frac{1}{3} + r \right), \\ N_4(r) &= -\frac{9}{16} \left(\frac{1}{3} + r \right) \left(\frac{1}{3} - r \right) (1+r). \end{aligned}$$

5.

GRINZI, CADRE ȘI GRILAJE

Cadrelle sunt structuri din elemente interconectate rigid, de tipul barelor încastrate la capete sau grinzilor. În programele de analiză cu elemente finite, acest tip de bară este denumit *beam*. Grinzile sunt bare solificate prin sarcini transversale, interconectate prin legături rigide, care au rotații determinate și care, în afara forțelor, transmit momente încovoietoare de la un element la altul.

Modelele matematice unidimensionale ale *grinzilor* drepte (denumite uneori greșit *bare*) se bazează pe două teorii: teoria *Bernoulli-Euler*, în care se neglijează deformațiile transversale de forfecare, și teoria *Bresse*, care consideră o distribuție aproximativă liniară a unghiurilor de lunecare specifică din secțiunea transversală. Comportarea grinzilor este descrisă de ecuații diferențiale de echilibru de ordinul patru iar deplasările au continuitate de tip C^1 . Aceasta presupune continuitatea deplasărilor transversale și a pantelor în interiorul elementelor și, mai ales, între elementele adiacente. Modelul de grindă cu forfecare se aplică elementelor din clasa C^0 . Se adoptă ipoteza că secțiunile rămân plane dar nu neapărat perpendiculare pe suprafața deformată neutră. Aceasta conduce la introducerea unei lunecări specifice medii, constante pe înălțimea secțiunii transversale.

În acest paragraf, întâi se prezintă elementul finit de *grindă plană* (*beam*) Bernoulli-Euler, definit în coordonate locale, apoi elementul finit de *cadru* (*frame*) care modelează o grindă înclinată și elementul finit de grilaj. În final se descrie elementul finit de grindă cu forfecare.

5.1 Discretizarea cu elemente finite

Un cadru plan este împărțit în elemente finite, ca în fig. 5.1. Fiecare nod are trei grade de libertate, două deplasări liniare și o rotație. Gradele de libertate ale nodului i sunt Q_{3i-2} – deplasarea în lungul axei X , Q_{3i-1} – deplasarea în lungul axei Y și Q_{3i} – rotația față de axa Z .

Nodurile sunt localizate prin coordonatele lor în sistemul de referință global XOY iar conectivitatea elementelor este definită utilizând indicii nodurilor. Elementele, modelate ca grinzi cu secțiunea constantă, fără deformații de forfecare și fără sarcini aplicate între noduri, au modulul de rigiditate la încovoiere EI și lungimea ℓ .

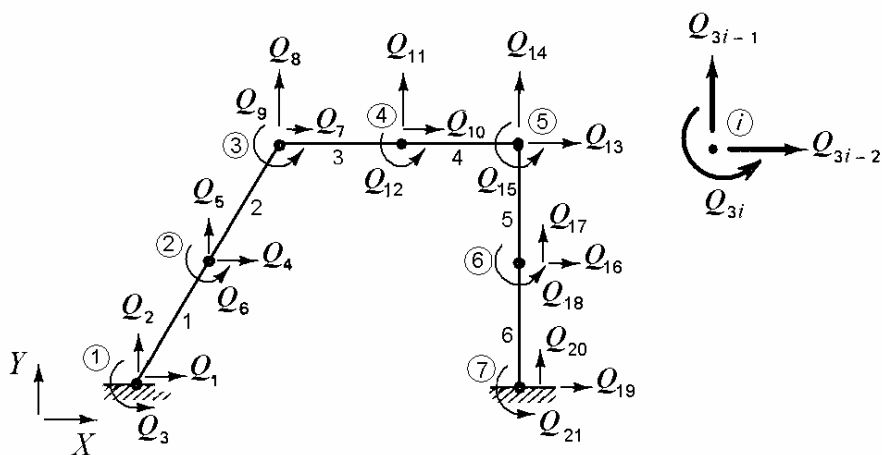


Fig. 5.1

În continuare se stabilesc funcțiile de formă pentru elementul de grindă plan Bernoulli-Euler, apoi se calculează matricea de rigiditate a unui element, întâi în sistemul de coordonate locale, apoi în sistemul global. Matricile sunt apoi expandate la dimensiunea structurii și însumate pentru a obține matricile globale nereduse. Impunând condițiile la limită, se calculează matricea de rigiditate globală redusă, care împreună cu vectorul forțelor nodale sunt utilizate în analiza statică.

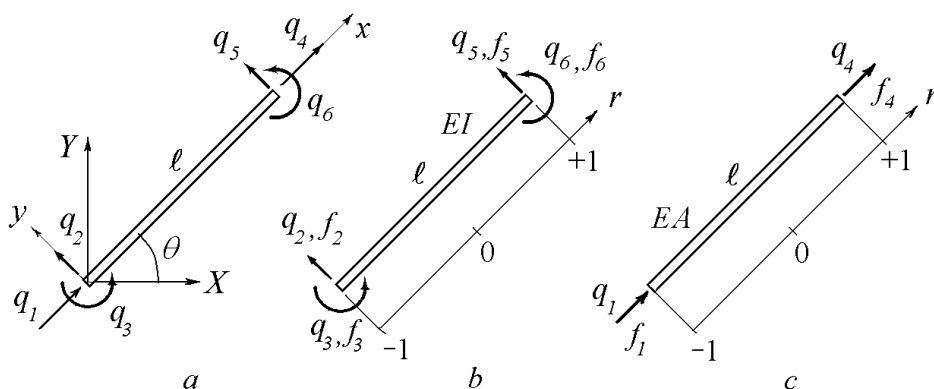


Fig. 5.2

Se consideră un element de bară înclinat, ca în fig. 5.2, *a*, în care se arată deplasările nodale și axele sistemelor de referință. În sistemul de coordonate fizice locale, axa x , orientată în lungul barei, are originea în capătul din stânga al barei și este înclinată cu unghiul θ față de axa globală X . Se mai poate folosi și un sistem de coordonate intrinseci (naturale).

Vectorul deplasărilor nodale ale elementului în coordonate locale este

$$\{q^e\} = [q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4 \ q_5 \ q_6]^T \quad (5.1)$$

iar vectorul forțelor nodale (se includ și momentele) ale elementului poate fi scris

$$\{f^e\} = [f_1 \ f_2 \ f_3 \ f_4 \ f_5 \ f_6]^T. \quad (5.2)$$

Forțele (și momentele) f_2, f_3, f_5, f_6 și deplasările corespunzătoare q_2, q_3, q_5, q_6 descriu încovoierea elementului (fig. 5.2, *b*), în timp ce forțele f_1, f_4 , și deplasările q_1, q_4 , descriu efectele axiale (fig. 5.2, *c*). Acțiunea lor este decuplată astfel că matricile respective ale elementului pot fi calculate separat.

5.2 Analiza statică a unei grinzi cu secțiunea constantă

În continuare se consideră grinzi cu secțiunea transversală simetrică față de planul sarcinilor aplicate (fig. 5.3). Deformațiile transversale de forfecare se neglijează, ca în teoria clasică a grinzilor Bernoulli-Euler. Asupra grinzii acționează doar sarcini transversale, forțele axiale fiind neglijate.

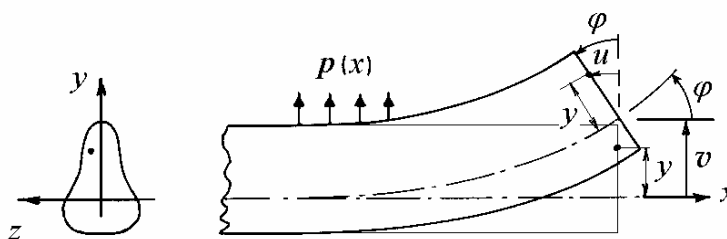


Fig. 5.3

Deplasarea axială a unui punct din secțiunea transversală, situat la distanța y de axa neutră, este aproximativ

$$u = -\varphi y = -\frac{dv}{dx} y, \quad (5.3)$$

unde v este săgeata axei barei în secțiunea x și $\varphi = v'$ este rotirea secțiunii transversale (sau panta) în x . Alungirile specifice sunt

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} = -\frac{d^2v}{dx^2}y = -\chi y, \quad (5.4)$$

unde $\chi \approx v''$ este *curbura* axei deformată a barei.

Tensiunile normale din secțiunea transversală sunt date de legea lui Hooke

$$\sigma_x = E \varepsilon_x = -E \frac{d^2v}{dx^2}y, \quad (5.5)$$

în care E este modulul de elasticitate longitudinal al materialului.

Momentul încovoietor se calculează pe baza distribuției tensiunilor pe înălțimea secțiunii transversale

$$M(x) = -\int_A \sigma_x y \, dA = EI_z \frac{d^2v}{dx^2} = EI_z \chi \quad (5.6)$$

unde I_z este momentul de inerție al secțiunii transversale față de axa neutră z . Semnul minus este introdus deoarece momentul M pozitiv este dirijat în sensul negativ al axei z (pe fața cu normală exterioară negativă) și produce o curbură pozitivă. Produsul EI_z este *modulul de rigiditate la încovoiere* al grinzii.

Forța tăietoare este dată de

$$T(x) = -\frac{dM}{dx} = -EI_z \frac{d^3v}{dx^3} = -EI_z v''' . \quad (5.7)$$

Sarcina transversală pe unitatea de lungime a barei este

$$p(x) = -\frac{dT}{dx} = EI_z \frac{d^4v}{dx^4} = EI_z v^{IV} . \quad (5.8)$$

Ecuția diferențială de echilibru se scrie

$$EI_z \frac{d^4v}{dx^4} = p(x). \quad (5.9)$$

Configurația de echilibru se obține din o ecuație diferențială de ordinul patru, având ca soluție un polinom de gradul trei care conține patru constante de integrare. Acestea se determină din patru condiții la limită, câte două la fiecare capăt al grinzii. Există condiții la limită geometrice sau *cinematice*, implicând deplasarea transversală și panta, și condiții la limită *fizice*, implicând momentul încovoietor și forța tăietoare.

5.3 Grinda fără sarcini între capete

La o grindă cu secțiunea constantă, neîncărcată între capete, $p = 0$ și din ecuația (5.9) rezultă $d^4v/dx^4 = 0$. Integrând de patru ori, se obține deplasarea transversală (săgeata) v descrisă de un polinom de gradul trei

$$v(x) = a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4. \quad (5.10)$$

În (5.10), cele patru constante de integrare a_1, a_2, a_3, a_4 pot fi determinate din condițiile la limită geometrice, care includ săgeata și panta la cele două capete (fig. 5.4):

$$\text{la } x = x_1, \quad v = v_1 = q_2, \quad \text{și } dv/dx = \varphi_1 = q_3; \quad (5.11, a)$$

$$\text{la } x = x_2, \quad v = v_2 = q_5, \quad \text{și } dv/dx = \varphi_2 = q_6. \quad (5.11, b)$$

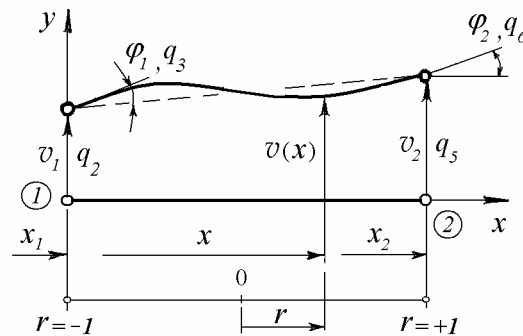


Fig. 5.4

Se obține

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ \varphi_1 \\ v_2 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^3 & x_1^2 & x_1 & 1 \\ 3x_1^2 & 2x_1 & 1 & 0 \\ x_2^3 & x_2^2 & x_2 & 1 \\ 3x_2^2 & 2x_2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix}.$$

Prin inversare, constantele de integrare a_1, a_2, a_3, a_4 pot fi calculate în funcție de deplasările nodale $v_1, \varphi_1, v_2, \varphi_2$, astfel încât săgeata grinzii se exprimă în funcție de deplasările nodale.

5.3.1 Funcțiile de formă

Deplasarea transversală (săgeata) poate fi exprimată în funcție de deplasările nodale sub forma

$$v(x) = [N] \{q^e\}, \quad (5.12)$$

unde $[N]$ este vectorul linie al funcțiilor de formă, care sunt polinoame de gradul trei, numite *polinoame hermitiene cubice* și

$$\{q^e\} = [v_1 \quad \varphi_1 \quad v_2 \quad \varphi_2]^T. \quad (5.13)$$

Utilizând coordonate naturale, cu $r = -1$ la nodul 1 și $r = +1$ la nodul 2,

$$r = \frac{2}{x_2 - x_1} \left(x - \frac{x_1 + x_2}{2} \right), \quad (5.14)$$

deplasarea transversală poate fi scrisă sub forma

$$v(r) = N_1(r) v_1 + N_2(r) \left(\frac{dv}{dr} \right)_1 + N_3(r) v_2 + N_4(r) \left(\frac{dv}{dr} \right)_2. \quad (5.15)$$

Deoarece transformarea coordonatelor se face conform relației (5.14)

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{x_2 - x_1}{2} r$$

și deoarece $\ell_e = x_2 - x_1$ este lungimea elementului

$$dx = \frac{\ell_e}{2} dr. \quad (5.16)$$

Calculând derivata

$$\frac{dv}{dr} = \frac{\ell_e}{2} \frac{dv}{dx}, \quad (5.17)$$

relația (5.15) devine

$$v(r) = N_1(r) v_1 + N_2(r) \frac{\ell_e}{2} \left(\frac{dv}{dx} \right)_1 + N_3(r) v_2 + N_4(r) \frac{\ell_e}{2} \left(\frac{dv}{dx} \right)_2 \quad (5.18)$$

sau

$$v(r) = N_1 \cdot q_2 + \frac{\ell_e}{2} N_2 \cdot q_3 + N_3 \cdot q_5 + \frac{\ell_e}{2} N_4 \cdot q_6. \quad (5.19)$$

În expresia (5.12) vectorul linie al funcțiilor de formă este

$$[N] = \left[N_1 \quad \frac{\ell_e}{2} N_2 \quad N_3 \quad \frac{\ell_e}{2} N_4 \right]. \quad (5.20)$$

Funcțiile de formă de tip Hermite sunt polinoame cubice care satisfac condițiile la limită date în Tabelul 5.1, unde semnul “prim” indică derivarea în raport cu variabila r .

Tabelul 5.1

	N_1	N'_1	N_2	N'_2	N_3	N'_3	N_4	N'_4
$r = -1$	1	0	0	1	0	0	0	0
$r = +1$	0	0	0	0	1	0	0	1

Impunând condițiile de mai sus unor polinoame de gradul trei cu patru constante arbitrare, se obțin expresiile funcțiilor de formă ale elementului *beam* în coordonate naturale (5.21), reprezentate grafic în fig. 5.5:

$$\begin{aligned}
 N_1(r) &= \frac{1}{4}(1-r)^2(2+r) = \frac{1}{4}(2-3r+r^3), \\
 N_2(r) &= \frac{1}{4}(1-r)^2(1+r) = \frac{1}{4}(1-r-r^2+r^3), \\
 N_3(r) &= \frac{1}{4}(1+r)^2(2-r) = \frac{1}{4}(2+3r-r^3), \\
 N_4(r) &= -\frac{1}{4}(1+r)^2(1-r) = -\frac{1}{4}(1+r-r^2-r^3).
 \end{aligned} \tag{5.21}$$

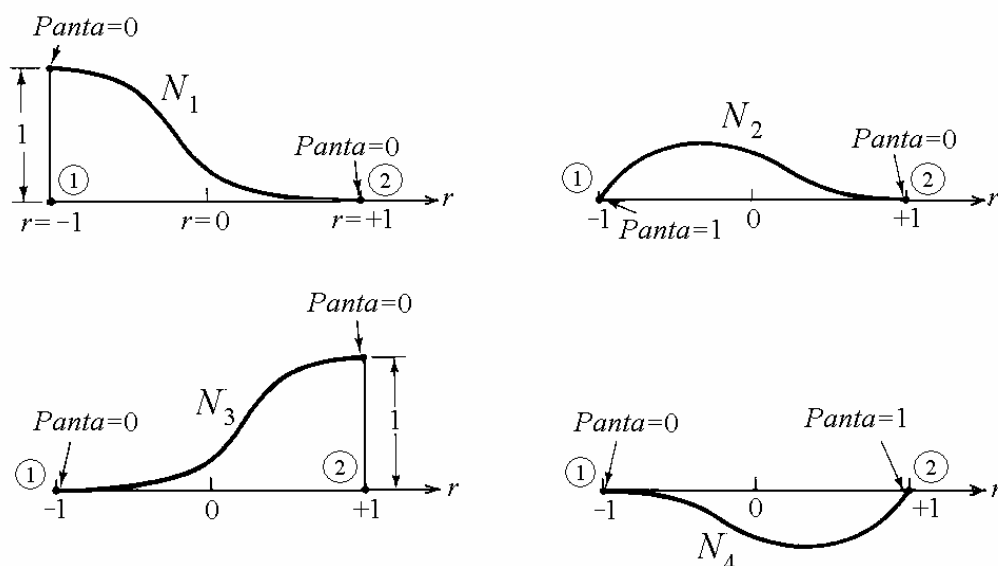


Fig. 5.5

Se poate verifica ușor că la nodul 1, $v = q_2$ și $\frac{dv}{dr} = \frac{\ell_e}{2} q_3$, iar la nodul 2, $v = q_5$ și $\frac{dv}{dr} = \frac{\ell_e}{2} q_6$.

5.3.2 Matricea de rigiditate a unui element de grindă

Energia de deformație U_e a unui element de grindă este

$$U_e = \frac{EI_e}{2} \int_e \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 dx. \quad (5.22)$$

Din relația (5.17) se obține

$$\frac{dv}{dx} = \frac{2}{\ell_e} \frac{dv}{dr} \quad \text{și} \quad \frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{4}{\ell_e^2} \frac{d^2 v}{dr^2}.$$

Înlocuind (5.12) rezultă

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{4}{\ell_e^2} \left[\frac{d^2 N}{dr^2} \right] \{ q^e \}. \quad (5.23)$$

Ridicând la pătrat se obține

$$\left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 = \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)^T \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right) = \{ q^e \}^T \frac{16}{\ell_e^4} \left[\frac{d^2 N}{dr^2} \right]^T \left[\frac{d^2 N}{dr^2} \right] \{ q^e \},$$

care se mai poate scrie

$$\left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 = \{ q^e \}^T \frac{16}{\ell_e^4} [N_r'']^T [N_r''] \{ q^e \}. \quad (5.24)$$

Înlocuind (5.16) și (5.24) în (5.22) se obține energia de deformație a elementului

$$U_e = \frac{1}{2} \{ q^e \}^T \frac{8EI_e}{\ell_e^3} \int_{-1}^{+1} [N_r'']^T [N_r''] dr \{ q^e \} \quad (5.25)$$

care are forma

$$U_e = \frac{1}{2} \{q^e\}^T [k_B^e] \{q^e\}. \quad (5.26)$$

Comparând (5.25) cu (5.26) se obține matricea de rigiditate a elementului pentru încovoiere

$$[k_B^e] = \frac{8EI_e}{\ell_e^3} \int_{-1}^{+1} [N_r'']^T [N_r''] dr \quad (5.27)$$

sau

$$[k_B^e] = \frac{8EI_e}{\ell_e^3} \int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} (N_1'')^2 & N_1''N_2'' & N_1''N_3'' & N_1''N_4'' \\ N_2''N_1'' & (N_2'')^2 & N_2''N_3'' & N_2''N_4'' \\ N_3''N_1'' & N_3''N_2'' & (N_3'')^2 & N_3''N_4'' \\ N_4''N_1'' & N_4''N_2'' & N_4''N_3'' & (N_4'')^2 \end{bmatrix} dr. \quad (5.28)$$

Înlocuind funcțiile de formă (5.21) și rezolvând integralele se obține matricea de rigiditate a elementului pentru încovoiere în coordonate locale

$$[k_B^e] = \frac{EI_e}{\ell_e^3} \begin{bmatrix} 12 & 6\ell & -12 & 6\ell \\ 6\ell & 4\ell^2 & -6\ell & 2\ell^2 \\ -12 & -6\ell & 12 & -6\ell \\ 6\ell & 2\ell^2 & -6\ell & 4\ell^2 \end{bmatrix}_e. \quad (5.29)$$

O metodă diferită de calcul al matricii (5.29) se bazează pe relația generală (4.19)

$$[k^e] = \int_{V_e} [B]^T E_e [B] dV. \quad (5.30)$$

Curbura χ (5.23) se poate exprima în funcție de deplasările nodale

$$\chi = \frac{d^2v}{dx^2} = \frac{4}{\ell_e^2} \left[\frac{d^2N}{dr^2} \right] \{q^e\} = [B] \{q^e\}, \quad (5.31)$$

unde vectorul $[B]$ este

$$[B] = \frac{1}{\ell_e} \begin{bmatrix} 6\frac{r}{\ell_e} & 3r-1 & -6\frac{r}{\ell_e} & 3r+1 \end{bmatrix}. \quad (5.32)$$

Înlocuind (5.32) și $dV = A_e dx$ în (5.30) se obține matricea (5.29).

5.3.3 Semnificația fizică a elementelor matricii de rigiditate

Matricea de rigiditate a unui element (5.29) exprimă vectorul forțelor nodale în funcție de vectorul deplasărilor nodale

$$\begin{Bmatrix} f_2 \\ f_3 \\ f_5 \\ f_6 \end{Bmatrix}_e = \frac{EI_e}{\ell^3} \begin{bmatrix} 12 & 6\ell & -12 & 6\ell \\ 6\ell & 4\ell^2 & -6\ell & 2\ell^2 \\ -12 & -6\ell & 12 & -6\ell \\ 6\ell & 2\ell^2 & -6\ell & 4\ell^2 \end{bmatrix}_e \begin{Bmatrix} q_2 \\ q_3 \\ q_5 \\ q_6 \end{Bmatrix}_e. \quad (5.33)$$

Fie un element de grindă cu capătul 2 fix ($q_5 = q_6 = 0$) și capătul 1 având o deplasare egală cu unitatea în lungul axei globale Y și rotire nulă ($q_2 = 1, q_3 = 0$), ca în figura 5.6.

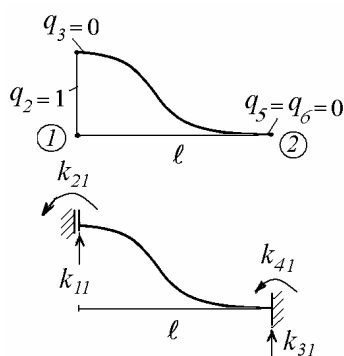


Fig. 5.6

Relația (5.33) se poate scrie

$$\begin{Bmatrix} f_2 \\ f_3 \\ f_5 \\ f_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & \cdot & \cdot & \cdot \\ k_{21} & \cdot & \cdot & \cdot \\ k_{31} & \cdot & \cdot & \cdot \\ k_{41} & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_2 = 1 \\ q_3 = 0 \\ q_5 = 0 \\ q_6 = 0 \end{Bmatrix} \quad (5.34)$$

de unde se obține

$$f_2 = k_{11}, \quad f_3 = k_{21}, \quad f_5 = k_{31}, \quad f_6 = k_{41}. \quad (5.35)$$

Rezultă că prima coloană a matricii de rigiditate reprezintă forțele și momentele care trebuie aplicate elementului de grindă pentru a-l menține în echilibru când $q_2 = 1$ și toate celelalte deplasări sunt nule.

Ecuțiile de echilibru al forțelor verticale și momentelor sunt

$$k_{11} + k_{31} = 0, \quad k_{21} + k_{41} + k_{31} \ell = 0. \quad (5.36)$$

5.4 Grinda cu sarcină distribuită între capete

La o grindă încărcată între capete, $p \neq 0$, $d^4v/dx^4 \neq 0$ în ecuația (5.9) și forma deformată a grinzii nu mai este descrisă de un polinom de gradul trei. Totuși acesta reprezintă soluția omogenă a ecuației diferențiale. Utilizând polinoamele cubice ca funcții de formă, deplasările nodale calculate sunt exacte. În interiorul elementelor, deplasările, momentele încovoietoare și forțele tăietoare sunt eronate.

Când sarcina transversală este uniform distribuită, $p = \text{const.}$, soluția generală a ecuației (5.9) este un polinom de gradul patru. Cele cinci constante de integrare trebuie determinate din cinci condiții la limită. Problema se rezolvă adăugând un nod interior în mijlocul elementului și desemnând săgeata în mijloc drept a cincea deplasare nodală.

În cazul unei sarcini transversale distribuite liniar, $v(x)$ este un polinom de gradul cinci cu șase constante arbitrare. Acestea pot fi determinate, adăugând deplasărilor nodale deplasarea transversală și panta la mijlocul elementului. Așa cum s-a arătat în Capitolul 4, creșterea gradului funcției care descrie deplasarea în interiorul unui element este echivalentă cu introducerea de noduri interioare.

Cu toate acestea, în practică se preferă utilizarea unor *funcții de formă aproximative* de grad inferior, care să asigure satisfacerea condițiilor minime de convergență. Funcțiile de formă cubice rezolvă problema. Acestea pot fi însă utilizate doar dacă elementul are modul de rigiditate la încovoiere EI_z constant și nu este încărcat între noduri. La barele cu sarcini transversale, soluția constă în înlocuirea sarcinii distribuite reale prin *forțe nodale echivalente*.

5.4.1 Vectorul coerent al forțelor nodale

Se consideră o sarcină transversală $p(x)$, distribuită în lungul elementului de grindă. Lucrul mecanic al sarcinii distribuite este

$$W = \int_{\ell_e} v p \, dx = \int_{\ell_e} v^T p \, dx. \quad (5.37)$$

Înlocuind (5.12), expresia (5.37) devine

$$W = \{q^e\}^T \int_{\ell_e} [N]^T p \, dx. \quad (5.38)$$

Aceasta are forma

$$W = \{q^e\}^T \{f^e\} \quad (5.39)$$

unde vectorul forțelor nodale echivalente este

$$\{f^e\} = \int_{\ell_e} [N]^T p(x) dx = \frac{\ell_e}{2} \int_{-1}^{+1} [N]^T p(r) dr. \quad (5.40)$$

Pentru elementul hermitian cu două noduri, dacă sarcina transversală este uniform distribuită, $p = \text{const.}$, vectorul forțelor nodale coerente este

$$\{f^e\} = \frac{\ell_e}{2} p \int_{-1}^{+1} [N]^T dr \quad (5.41)$$

sau, înlocuind (5.18),

$$\{f^e\} = \left[\frac{p\ell_e}{2} \quad \frac{p\ell_e^2}{12} \quad \frac{p\ell_e}{2} \quad -\frac{p\ell_e^2}{12} \right]^T. \quad (5.42)$$

În fig. 5.7, *a* se observă că f_2^e este o forță tăietoare și f_3^e este un moment. Acestea se numesc forțe nodale “cinematic echivalente” deoarece înlocuiesc o sarcină distribuită $p(r)$ ponderată cu funcțiile de formă $N_i(r)$ astfel încât efectuează același lucru mecanic. Ele sunt ‘coerente’ deoarece se calculează utilizând aceleași funcții de formă ca pentru matricea de rigiditate.

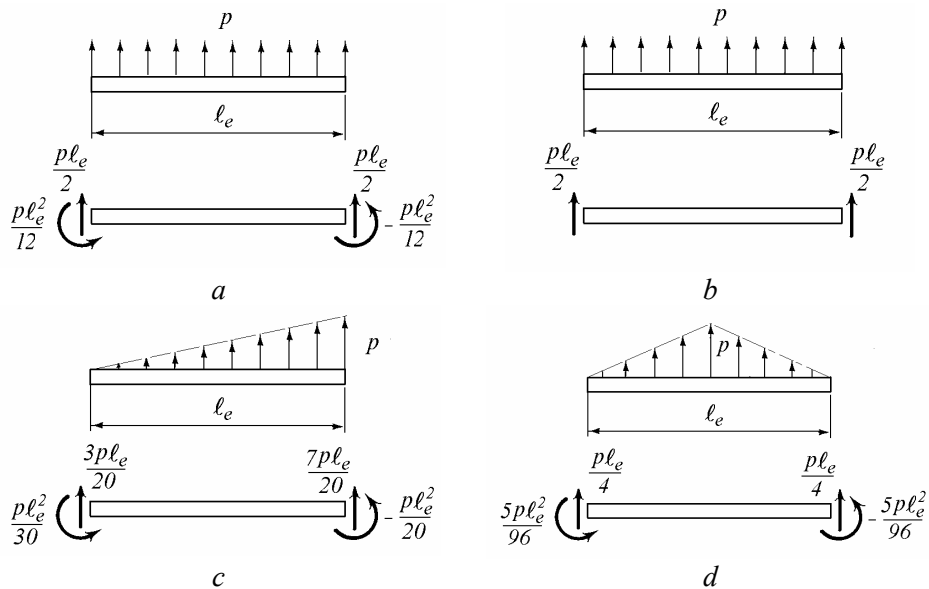


Fig. 5.7

Forțele cinematic echivalente sunt cele care, dacă sunt aplicate în sensuri contrare drept constrângerii, mențin toate deplasările nodale nule în prezența încărcării reale. Înlocuirea sarcinii $p = \text{const.}$ cu forțe echivalente static (fig. 5.6, *b*) ar fi incorectă deoarece elementul de grindă este încastrat la capete, adică este

încăstrat în elementele de grindă adiacente. Pentru a asigura continuitatea C^1 între elemente, forțele nodale trebuie să includă momente încovoietoare, nu numai forțe tăietoare. Forțele nodale echivalente pentru sarcini distribuite liniar sunt date în figurile 5.6, *c* and *d*.

Forțele cinematic echivalente produc deplasări care nu coincid cu cele produse de încărcarea reală (v. Exemplul 5.1). A considera o formă deformată aproximativă în locul celei adevărate este similar cu a presupune existența unor încărcări fictive care forțează grinda să aibă forma deformată aproximativă respectivă. Aceasta echivalează cu aplicarea asupra grinzii a unor constrângeri suplimentare, deci cu rigidizarea ei. Deformațiile acestui model cu elemente finite *suprarigid* sunt mai mici “în medie” decât deformațiile structurii reale.

Sursa erorii provine din alegerea arbitrară a funcțiilor de formă. Chiar dacă acestea sunt astfel construite încât să satisfacă la capete condițiile la limită geometrice, echilibrul în interiorul elementelor nu este realizat, datorită diferenței între sarcina aplicată $p(x)$ și rezistența $EI_z v^{IV}$ care produce un fel de forță reziduală neechilibrată.

Cu cât elementul este mai mic, cu atât mai mică este eroarea, deci se așteaptă o creștere a preciziei prin creșterea numărului de elemente cu care se modelează aceeași structură, deci prin *rafinarea rețelei*. O soluție corectă ar trebui să tindă monoton spre valoarea adevărată prin valori crescătoare ale deplasărilor. Se spune că soluția cu elemente finite reprezintă o *limită inferioară*. Aceasta se aplică doar energiei de deformație și nu deplasărilor sau tensiunilor într-un punct. Tensiunile locale pot fi mai mari decât cele adevărate.

Utilizarea funcțiilor cubice pentru câmpul de deplasări implică momente încovoietoare (deci tensiuni) cu variație liniară, deși se știe că pe porțiunile cu sarcini uniform distribuite momentele încovoietoare variază parabolic.

Exemplul 5.1

Să se calculeze săgeata la mijlocul grinzii simplu rezemate din fig. E5.1, încărcată cu o sarcină uniform distribuită.

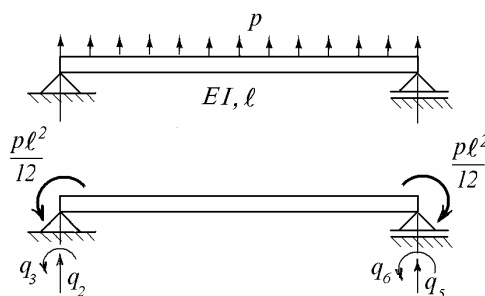


Fig. E5.1

Rezolvare. Modelând grinda cu un singur element finit, sarcina distribuită este înlocuită cu două momente concentrate la capete.

Utilizând condițiile la limită și forțele nodale echivalente, ecuațiile de echilibru se pot scrie

$$\frac{EI_z}{\ell^3} \begin{bmatrix} 12 & 6\ell & -12 & 6\ell \\ 6\ell & 4\ell^2 & -6\ell & 2\ell^2 \\ -12 & -6\ell & 12 & -6\ell \\ 6\ell & 2\ell^2 & -6\ell & 4\ell^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_2 = 0 \\ q_3 \\ q_5 = 0 \\ q_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{p\ell}{2} \\ \frac{p\ell^2}{12} \\ \frac{p\ell}{2} \\ -\frac{p\ell^2}{12} \end{Bmatrix}.$$

Sistemul de ecuații în deplasările necunoscute este

$$\begin{aligned} \frac{EI}{\ell} (4q_3 + 2q_6) &= \frac{p\ell^2}{12}, \\ \frac{EI}{\ell} (2q_3 + 4q_6) &= -\frac{p\ell^2}{12}, \end{aligned}$$

având soluțiile

$$q_6 = -q_3 = -\frac{p\ell^3}{24EI}.$$

Săgeata la mijlocul grinzii este

$$v\left(\frac{\ell}{2}\right) = N_2\left(\frac{\ell}{2}\right)q_3 + N_4\left(\frac{\ell}{2}\right)q_6 = \frac{p\ell^4}{96EI}.$$

Soluția adevărată este

$$v_{adev} = \frac{5p\ell^4}{384EI},$$

deci soluția aproximativă obținută cu elementul finit este, cum era de așteptat, mai mică

$$v\left(\frac{\ell}{2}\right) = \frac{4}{5}v_{adev}.$$

5.4.2 Funcții de interpolare de grad superior

În continuare se analizează posibilitatea aproximării deplasărilor unui sistem de ordinul patru printr-un polinom de gradul patru de forma

$$v(x) = a_1 x^4 + a_2 x^3 + a_3 x^2 + a_4 x + a_5 . \quad (5.43)$$

Cele cinci constante de integrare a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 din (5.43) pot fi determinate în funcție de deplasările și pantele la capete, și de deplasarea nodului interior de la mijlocul elementului (fig. 5.8):

$$\begin{aligned} \text{la } x = x_1, \quad v = v_1, \quad \text{și} \quad dv/dx = \varphi_1, \\ \text{la } x = x_2, \quad v = v_2, \quad \text{și} \quad dv/dx = \varphi_2, \\ \text{la } x = x_3, \quad v = v_3, \end{aligned} \quad (5.44)$$

de unde rezultă deplasările nodale în funcție de coeficienții polinomiali

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ \varphi_1 \\ v_2 \\ \varphi_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \ell & \ell^2 & \ell^3 & \ell^4 \\ 0 & 1 & 2\ell & 3\ell^2 & 4\ell^3 \\ 1 & \frac{\ell}{2} & \frac{\ell^2}{4} & \frac{\ell^3}{8} & \frac{\ell^4}{16} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} a_5 \\ a_4 \\ a_3 \\ a_2 \\ a_1 \end{Bmatrix} .$$

Prin inversare se obține

$$\begin{Bmatrix} a_5 \\ a_4 \\ a_3 \\ a_2 \\ a_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{11}{\ell^2} & -\frac{4}{\ell} & -\frac{5}{\ell^2} & \frac{1}{\ell} & \frac{16}{\ell^2} \\ \frac{18}{\ell^3} & \frac{5}{\ell^2} & \frac{14}{\ell^3} & -\frac{3}{\ell^2} & -\frac{32}{\ell^3} \\ -\frac{8}{\ell^4} & -\frac{2}{\ell^3} & -\frac{8}{\ell^4} & \frac{2}{\ell^3} & \frac{16}{\ell^4} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} v_1 \\ \varphi_1 \\ v_2 \\ \varphi_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} .$$

Săgeata grinzii este dată de o expresie de forma (5.12)

$$v(x) = [N] \{ q^e \} = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4 \quad N_5] \begin{Bmatrix} v_1 \\ \varphi_1 \\ v_2 \\ \varphi_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} , \quad (5.45)$$

unde funcțiile de formă de gradul patru sunt

$$\begin{aligned}
 N_1(r) &= -\frac{1}{4}(1-r)^2 r(3+2r), \\
 N_2(r) &= -\frac{1}{8}(1-r)^2 r(1+r)\ell, \\
 N_3(r) &= \frac{1}{4}(3-2r)r(1+r)^2, \\
 N_4(r) &= -\frac{1}{8}(1-r)r(1+r)^2\ell, \\
 N_5(r) &= (1-r)^2(1+r)^2.
 \end{aligned} \tag{5.46}$$

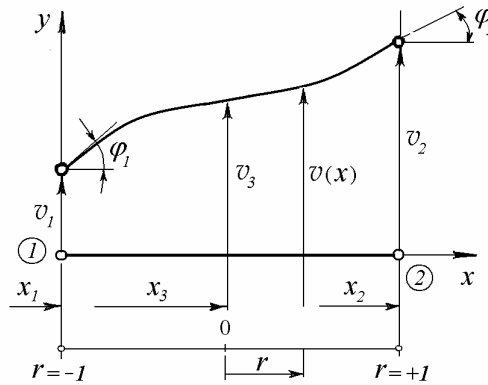


Fig. 5.8

Înlocuind funcțiile de formă (5.46) în relația (5.27) și calculând integralele, se obține matricea de rigiditate a elementului

$$\left[k_B^e \right] = \frac{EI_e}{5\ell_e^3} \begin{bmatrix} 316 & 94\ell_e & 196 & -34\ell_e & -512 \\ & 36\ell_e^2 & 34\ell_e & -6\ell_e^2 & -128\ell_e \\ & & 316 & -94\ell_e & -512 \\ & & & 36\ell_e^2 & 128\ell_e \\ \text{sim} & & & & 1024 \end{bmatrix}. \tag{5.47}$$

Pentru $p = \text{const.}$, vectorul coerent al forțelor nodale (5.41) este

$$\{ f^e \} = \left[\frac{7p\ell_e}{30} \quad \frac{p\ell_e^2}{60} \quad \frac{7p\ell_e}{30} \quad -\frac{p\ell_e^2}{60} \quad \frac{8p\ell_e}{15} \right]^T. \tag{5.48}$$

5.4.3 Momentul încovoielor și forța tăietoare

Utilizând expresia momentului încovoielor (5.6) și relația (5.12) rezultă

$$M = EI_z \frac{d^2 v}{dx^2} = EI_z \frac{4}{\ell_e^2} \frac{d^2 v}{dr^2} = EI_z \frac{4}{\ell_e^2} [N'''] \{q^e\},$$

$$M = \frac{EI_z}{\ell_e^2} [6r \quad (3r-1)\ell_e \quad -6r \quad (3r+1)\ell_e] \{q^e\}. \quad (5.49)$$

Forța tăietoare se obține din relația (5.7)

$$T = -EI_z \frac{d^3 v}{dx^3} = -EI_z \frac{8}{\ell_e^3} \frac{d^3 v}{dr^3} = -EI_z \frac{8}{\ell_e^3} [N'''''] \{q^e\},$$

$$T = \frac{6EI_z}{\ell_e^3} [-2 \quad -\ell_e \quad 2 \quad -\ell_e] \{q^e\}. \quad (5.50)$$

Pentru elemente încărcate cu sarcină uniform distribuită, forțele de echilibru de la capete sunt date de

$$\begin{Bmatrix} R_2 \\ R_3 \\ R_5 \\ R_6 \end{Bmatrix}_e = \frac{EI_e}{\ell_e^3} \begin{bmatrix} 12 & 6\ell & -12 & 6\ell \\ 6\ell & 4\ell^2 & -6\ell & 2\ell^2 \\ -12 & -6\ell & 12 & -6\ell \\ 6\ell & 2\ell^2 & -6\ell & 4\ell^2 \end{bmatrix}_e \begin{Bmatrix} q_2 \\ q_3 \\ q_5 \\ q_6 \end{Bmatrix}_e + \begin{Bmatrix} -\frac{p\ell_e}{2} \\ -\frac{p\ell_e^2}{12} \\ -\frac{p\ell_e}{2} \\ \frac{p\ell_e^2}{12} \end{Bmatrix}. \quad (5.51)$$

Primul termen din membrul drept este $[k_B^e] \{q^e\}$. Termenul al doilea constă din elemente denumite *reacțiuni la capete fixe*.

Forțele tăietoare la cele două capete sunt $T_1 = -R_2$ și $T_2 = R_5$. Momentele încovoiitoare la capete sunt $M_1 = -R_3$ și $M_2 = R_6$. Pentru $p = 0$, acestea se obțin înlocuind $r = -1$ și $r = +1$ în (5.49) și (5.50).

Când $p = const.$, valorile exacte ale momentului încovoielor și forței tăietoare în interiorul elementului sunt date de

$$M_p = M - \frac{p\ell_e^2}{12} + \frac{p\ell_e}{2} \frac{\ell_e}{2} (r+1) + \frac{p}{2} \frac{\ell_e^2}{4} (r+1)^2,$$

$$T_p = T - \frac{P \ell_e}{2} r,$$

unde M și T sunt date de expresiile (5.49) și respectiv (5.50), valabile pentru $p = 0$.

5.5 Condiții de convergență minimale

Pe măsură ce dimensiunile elementelor sunt reduse, secvența de soluții la o problemă structurală trebuie să convergă monoton spre rezultatul corect, cu condiția ca funcțiile de aproximare a deplasărilor să satisfacă următoarele criterii:

1. *Un element trebuie să descrie exact mișcările de corp rigid.*

Deși echilibrul nu este satisfăcut exact în orice punct interior și la granițele între elemente, elementul în ansamblu trebuie să fie în echilibru, deoarece structura în ansamblu trebuie să fie în echilibru. Dacă se dau deplasărilor nodale valori corespunzătoare unei mișcări de corp rigid, deformațiile specifice rezultate trebuie să fie nule, la fel forțele nodale, iar deplasările punctelor interioare trebuie să corespundă deplasării de corp rigid impuse.

a. *Translație.* Dacă nodurile au deplasări egale cu unitatea în lungul axei y (fig. 5.9, a), din relația (5.12) se obține

$$v(x) = [N] \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = N_1 + N_3 = \frac{1}{4}(2 - 3r + r^3) + \frac{1}{4}(2 + 3r - r^3) = 1 = \text{const.},$$

deci tot elementul se deplasează în lungul axei y ca un corp rigid.

b. *Rotație.* Dacă rotirile la noduri sunt egale cu 1, nodul 1 fiind fix și nodul 2 având o deplasare ℓ_e în lungul axei y (fig. 5.9, b), din relația (5.12) rezultă

$$v(x) = [N] \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ \ell \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{\ell_e}{2} N_2 + \ell_e N_3 + \frac{\ell_e}{2} N_4 = \frac{\ell_e}{2} (1 + r) = \text{liniar},$$

deci elementul are într-adevăr o rotație ca un corp rigid în sens antiorar.

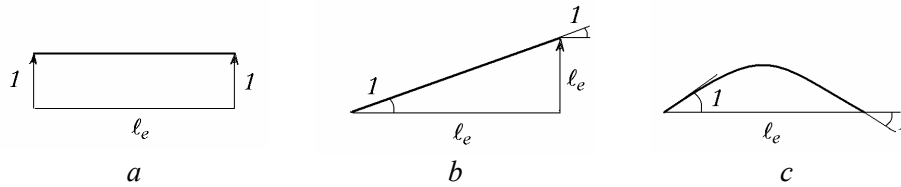


Fig. 5.9

2. Un element trebuie să simuleze stări de deformații specifice constante.

În cazul grinzilor, când dimensiunile elementelor tind spre zero, acestea trebuie să aibă cel puțin curbura constantă. Presupunând deplasări la capete nule în direcția y și rotații egale cu 1 în sensuri contrare (fig. 5.9, c), săgeata are expresia

$$v(x) = [N] \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix} = \frac{\ell_e}{2} N_2 - \frac{\ell_e}{2} N_4 = \frac{\ell_e}{4} (1 - r^2),$$

deci derivata a doua (curbura) este constantă

$$v'' = -\ell/2 = \text{const.}$$

5.6 Elementul de cadru plan

Așa cum se arată în fig. 5.2, un element de grindă înclinat față de axe are și deformații longitudinale deoarece, în afara momentelor încovoietoare și forțelor tăietoare, acesta este sollicitat de forțe axiale. Deoarece deplasările de încovoiere și cele de întindere-compresiune sunt decuplate, cele două matrici de rigiditate pot fi adunate respectând amplasarea elementelor acestora.

5.6.1 Eforturi axiale

Forțele nodale axiale se exprimă în funcție de deplasările axiale prin relația

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_4 \end{Bmatrix} = [k_S^e] \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_4 \end{Bmatrix} \quad (5.52)$$

în care matricea de rigiditate (4.22) este

$$[k_S^e] = \frac{EA_e}{\ell_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.53)$$

5.6.2 Matricea de rigiditate și vectorul forțelor în coordonate locale

Combinând expresiile (5.53) și (5.29) prin amplasarea elementelor în poziția corespunzătoare, se obține matricea de rigiditate a unui element de cadru plan

$$[k^e] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & -\frac{EA}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{\ell^3} & \frac{6EI}{\ell^2} & 0 & -\frac{12EI}{\ell^3} & \frac{6EI}{\ell^2} \\ 0 & \frac{6EI}{\ell^2} & \frac{4EI}{\ell} & 0 & -\frac{6EI}{\ell^2} & \frac{2EI}{\ell} \\ -\frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & \frac{EA}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{\ell^3} & -\frac{6EI}{\ell^2} & 0 & \frac{12EI}{\ell^3} & -\frac{6EI}{\ell^2} \\ 0 & \frac{6EI}{\ell^2} & \frac{2EI}{\ell} & 0 & -\frac{6EI}{\ell^2} & \frac{4EI}{\ell} \end{bmatrix}_e \quad (5.54)$$

În expresia (5.54), raportul între elementele care descriu încovoierea și cele care descriu întinderea este de ordinul $(i/\ell)^2$, unde 'i' este raza de inerție. La bare zvelte, acest raport poate fi între 1/20 și 1/50, deci matricea de rigiditate poate fi rău condiționată numeric.

La elemente încărcate cu o sarcină transversală uniform distribuită, vectorul forțelor nodale coerente este

$$\{f^e\} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{p\ell_e}{2} & \frac{p\ell_e^2}{12} & 0 & \frac{p\ell_e}{2} & -\frac{p\ell_e^2}{12} \end{bmatrix}^T \quad (5.55)$$

5.6.3 Transformarea coordonatelor

În fig. 5.10 se prezintă un element de cadru plan în starea inițială și cea deformată. Pentru nodul 1, deplasările liniare locale q_1 și q_2 sunt exprimate în funcție de deplasările liniare globale Q_1 și Q_2 prin relațiile

$$\begin{aligned} q_1 &= Q_1 \cos \theta + Q_2 \sin \theta, \\ q_2 &= -Q_1 \sin \theta + Q_2 \cos \theta. \end{aligned} \quad (5.56)$$

Relațiile (5.56) pot fi scrise matricial sub forma

$$\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix} \quad (5.57)$$

unde $c = \cos \theta$ și $s = \sin \theta$.

Deplasările unghiulare (rotirile) sunt aceleași în ambele sisteme de coordonate

$$q_3 = Q_3. \quad (5.58)$$

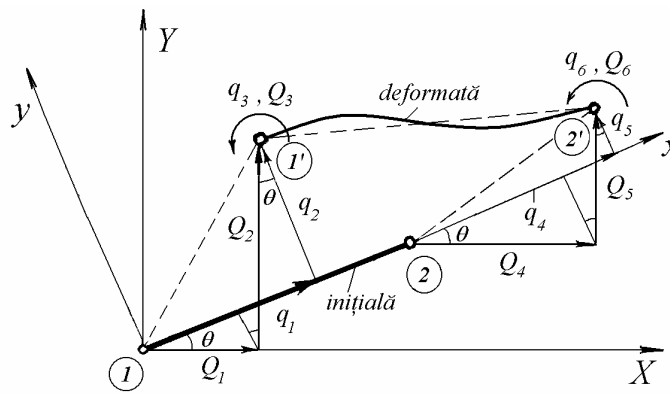


Fig. 5.10

Adăugând relațiile similare scrise pentru nodul 2

$$\begin{Bmatrix} q_4 \\ q_5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_4 \\ Q_5 \end{Bmatrix}, \quad q_6 = Q_6, \quad (5.59)$$

rezultă

$$\{q^e\} = [T^e] \{Q^e\}. \quad (5.60)$$

unde $\{q^e\}$ este vectorul deplasărilor elementului în sistemul de coordonate locale, $\{Q^e\}$ este vectorul deplasărilor elementului în sistemul de coordonate globale și

$$[T^e] = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.61)$$

este matricea de transformare din coordonate locale în coordonate globale.

5.6.4 Matricea de rigiditate și vectorul forțelor în coordonate globale

Utilizând același procedeu ca în § 3.7 se obține matricea de rigiditate a elementului de cadru plan în coordonate globale

$$[K^e] = [T^e]^T [k^e] [T^e]. \quad (5.62)$$

Forțele nodale care înlocuiesc o sarcină uniform distribuită p sunt date de

$$\{F^e\} = [T^e]^T \{f^e\}. \quad (5.63)$$

Forțele $\{F^e\}$ se adaugă vectorului global al forțelor.

5.7 Asamblarea matricii de rigiditate globale

Matricea de rigiditate globală, $[\bar{K}]$, este asamblată din matricile elementelor $[K^e]$ utilizând matricile de conectivitate ale elementelor $[\tilde{T}^e]$, care stabilesc legătura între deplasările nodale la nivelul elementelor și deplasările nodale la nivelul întregii structuri, prin relații de forma

$$\{Q^e\} = [\tilde{T}^e] \{\bar{Q}\}. \quad (5.64)$$

Matricea de rigiditate globală neredusă este egală cu suma matricilor de rigiditate expandate ale elementelor

$$[\bar{K}] = \sum_e [\tilde{K}^e], \quad (5.65)$$

unde

$$[\tilde{K}^e] = [\tilde{T}^e]^T [K^e] [\tilde{T}^e]. \quad (5.66)$$

Utilizând condițiile la limită, se calculează matricea de rigiditate globală redusă și vectorul global redus al forțelor nodale, care intervin în ecuațiile de echilibru $[K] \{Q\} = \{F\}$.

După rezolvarea sistemului ecuațiilor de echilibru, deci cunoscând toate deplasările nodale, se pot calcula deformațiile specifice la nivel de element, pe baza relațiilor (5.4), (5.12) și (5.60)

$$\varepsilon^e = -y v'' = -y [N''] \{q^e\} = -y [N''] [T^e] \{Q^e\}. \quad (5.67)$$

Din legea lui Hooke se calculează apoi tensiunile.

Deformațiile specifice, și deci tensiunile, sunt eronate. Deformațiile specifice sunt derivate ale unor deplasări aproximative, iar derivarea scade inevitabil precizia.

Exemplul 5.2

Să se calculeze săgeata în capătul liber al grinzii în consolă cu secțiunea în trepte din fig. E5.2.

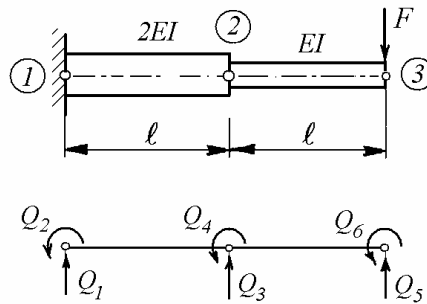


Fig. E5.2

Rezolvare. Se împarte grinda în două elemente hermitiene cubice. Matricile de rigiditate ale elementelor sunt

$$[k^1] = \frac{2EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix}, \quad [k^2] = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix}.$$

Matricea de rigiditate globală neredusă este

$$[\bar{K}] = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 24 & 12l & -24 & 12l & 0 & 0 \\ 12l & 8l^2 & -12l & 4l^2 & 0 & 0 \\ -24 & -12l & 36 & -6l & -12 & 6l \\ 12l & 4l^2 & -6l & 12l^2 & -6l & 2l^2 \\ 0 & 0 & -12 & -6l & 12 & -6l \\ 0 & 0 & 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix}.$$

Utilizând condițiile la limită în încăstrare $Q_1 = Q_2 = 0$, și eliminând primele două linii și coloane, se obțin ecuațiile de echilibru

$$\frac{EI}{\ell^3} \begin{bmatrix} 36 & -6\ell & -12 & 6\ell \\ -6\ell & 12\ell^2 & -6\ell & 2\ell^2 \\ -12 & -6\ell & 12 & -6\ell \\ 6\ell & 2\ell^2 & -6\ell & 4\ell^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -F \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Cele trei ecuații cu membrul drept zero pot fi scrise sub forma

$$\begin{bmatrix} 36 & -6\ell & 6\ell \\ -6\ell & 12\ell^2 & 2\ell^2 \\ 6\ell & 2\ell^2 & 4\ell^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_3 \\ Q_4 \\ Q_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 12 \\ 6\ell \\ 6\ell \end{Bmatrix} Q_5.$$

de unde prin inversare rezultă

$$\begin{Bmatrix} Q_3 \\ Q_4 \\ Q_6 \end{Bmatrix} = \frac{1}{216\ell^2} \begin{bmatrix} 11\ell^2 & 9\ell & -21\ell \\ 9\ell & 27 & -27 \\ -21\ell & -27 & 99 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 12 \\ 6\ell \\ 6\ell \end{Bmatrix} Q_5 = \frac{1}{216\ell} \begin{Bmatrix} 60\ell \\ 108 \\ 180 \end{Bmatrix} Q_5.$$

Înlocuind cele trei deplasări în ecuația cu membrul drept diferit de zero

$$\frac{EI}{\ell^3} (-12Q_3 - 6\ell Q_4 + 12Q_5 - 6\ell Q_6) = -F$$

se obține săgeata în capătul grinzii

$$v_3 = Q_5 = -1,5 \frac{F\ell^3}{EI}.$$

Exemplul 5.3

Să se calculeze săgeata în punctul 2 și reacțiunile în reazeme la grinda din figura E5.3.

Rezolvare. Se modelează grinda cu două elemente finite de tip Bernoulli-Euler. Asamblând matricile de rigiditate ale elementelor de forma (5.29), se obține matricea de rigiditate globală neredusă

$$[\bar{K}] = \frac{EI}{\ell^3} \begin{bmatrix} 12 & 6\ell & -12 & 6\ell & 0 & 0 \\ 6\ell & 4\ell^2 & -6\ell & 2\ell^2 & 0 & 0 \\ -12 & -6\ell & 24 & 0 & -12 & 6\ell \\ 6\ell & 2\ell^2 & 0 & 8\ell^2 & -6\ell & 2\ell^2 \\ 0 & 0 & -12 & -6\ell & 12 & -6\ell \\ 0 & 0 & 6\ell & 2\ell^2 & -6\ell & 4\ell^2 \end{bmatrix}.$$

În încastrare $Q_1 = Q_2 = 0$; în capătul simplu rezemat $Q_5 = 0$. Eliminând liniile și coloanele corespunzătoare se obțin ecuațiile de echilibru

$$\frac{EI}{\ell^3} \begin{bmatrix} 24 & 0 & 6\ell \\ 0 & 8\ell^2 & 2\ell^2 \\ 6\ell & 2\ell^2 & 4\ell^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_3 \\ Q_4 \\ Q_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -F \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Ultimele două ecuații se scriu

$$\begin{bmatrix} 8\ell^2 & 2\ell^2 \\ 2\ell^2 & 4\ell^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_4 \\ Q_6 \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} 0 \\ 6\ell \end{Bmatrix} Q_3$$

de unde rezultă

$$Q_4 = \frac{3}{7\ell} Q_3, \quad Q_6 = -\frac{12}{7\ell} Q_3.$$

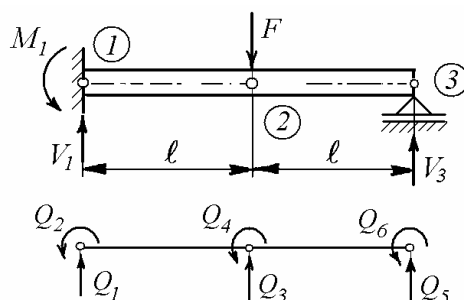


Fig. E5.3

Înlocuind Q_4 și Q_6 în prima ecuație, se obține

$$24Q_3 + \begin{bmatrix} 0 & 6\ell \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 3/7\ell \\ -12/7\ell \end{Bmatrix} Q_3 = -\frac{F\ell^3}{EI}$$

deci

$$v_2 = Q_3 = -\frac{7}{96} \frac{F\ell^3}{EI}.$$

Rotirile sunt

$$\varphi_2 = Q_4 = -\frac{3}{96} \frac{F\ell^2}{EI}, \quad \varphi_3 = Q_6 = \frac{12}{96} \frac{F\ell^2}{EI}.$$

Reacțiunile din reazeme se obțin din ecuațiile eliminate

$$\frac{EI}{\ell^3} \begin{bmatrix} -12 & 6\ell & 0 \\ -6\ell & 2\ell^2 & 0 \\ -12 & -6\ell & -6\ell \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_3 \\ Q_4 \\ Q_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} V_1 \\ M_1 \\ V_3 \end{Bmatrix}$$

de unde rezultă

$$V_1 = \frac{11}{16}F, \quad M_1 = -\frac{3}{8}F\ell, \quad V_3 = \frac{5}{16}F.$$

Exemplul 5.4

Sa se calculeze săgeata în punctul 2 și reacțiunile la grinda dublu încastrată din figura E5.4.

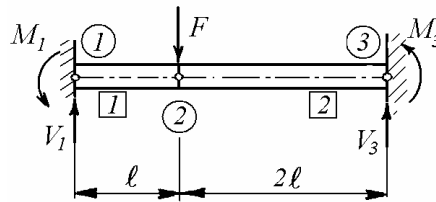


Fig. E5.4

Rezolvare. Se modelează grinda cu două elemente finite de tip Bernoulli-Euler. Utilizând condițiile la limită $Q_1 = Q_2 = Q_5 = Q_6 = 0$, ecuațiile de echilibru se scriu sub forma

$$\frac{EI}{\ell^3} \begin{bmatrix} 12 & 6\ell & -12 & 6\ell & 0 & 0 \\ 6\ell & 4\ell^2 & -6\ell & 2\ell^2 & 0 & 0 \\ -12 & -6\ell & 13,5 & -4,5\ell & -1,5 & 1,5\ell \\ 6\ell & 2\ell^2 & -4,5\ell & 6\ell^2 & -1,5\ell & \ell^2 \\ 0 & 0 & -1,5 & -1,5\ell & 1,5 & -1,5\ell \\ 0 & 0 & 1,5\ell & \ell^2 & -1,5\ell & 2\ell^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} V_1 \\ M_1 \\ -F \\ 0 \\ V_3 \\ M_3 \end{Bmatrix}.$$

A treia și a patra ecuație

$$\frac{EI}{\ell^3} \begin{bmatrix} 13,5 & -4,5\ell \\ -4,5\ell & 6\ell^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_3 \\ Q_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -F \\ 0 \end{Bmatrix}$$

au soluțiile

$$v_2 = Q_3 = -\frac{8}{81} \frac{F\ell^3}{EI}, \quad \varphi_2 = Q_4 = -\frac{2}{27} \frac{F\ell^2}{EI}.$$

Înlocuind aceste deplasări în celelalte patru ecuații rezultă

$$\frac{EI}{\ell^3} \begin{bmatrix} -12 & 6\ell \\ -6\ell & 2\ell^2 \\ -1,5 & -1,5\ell \\ 1,5\ell & \ell^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{8}{81}\ell \\ -\frac{2}{27} \end{Bmatrix} \frac{F\ell^2}{EI} = \begin{Bmatrix} V_1 \\ M_1 \\ V_3 \\ M_3 \end{Bmatrix}.$$

Reacțiunile din încastrări au valorile

$$V_1 = \frac{20}{27}F, \quad M_1 = \frac{4}{9}F\ell, \quad V_3 = \frac{7}{27}F, \quad M_3 = -\frac{2}{9}F\ell.$$

Exemplul 5.5

Să se calculeze rotirile pe reazeme și reacțiunile la grinda continuă din fig. E5.5 la care pe deschiderea din dreapta acționează o sarcină transversală uniform distribuită.

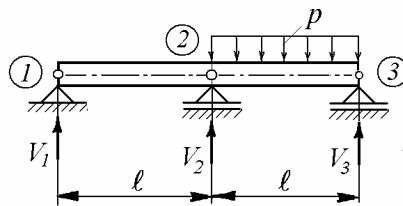


Fig. E5.5

Rezolvare. Se modelează grinda cu două elemente finite de tip Bernoulli-Euler. Utilizând condițiile la limită $Q_1 = Q_3 = Q_5 = 0$, sistemul ecuațiilor de echilibru se scrie matricial sub forma

$$\frac{EI}{\ell^3} \begin{bmatrix} 12 & 6\ell & -12 & 6\ell & 0 & 0 \\ 6\ell & 4\ell^2 & -6\ell & 2\ell^2 & 0 & 0 \\ -12 & -6\ell & 24 & 0 & -12 & 6\ell \\ 6\ell & 2\ell^2 & 0 & 8\ell^2 & -6\ell & 2\ell^2 \\ 0 & 0 & -12 & -6\ell & 12 & -6\ell \\ 0 & 0 & 6\ell & 2\ell^2 & -6\ell & 4\ell^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ Q_2 \\ 0 \\ Q_4 \\ 0 \\ Q_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} V_1 \\ 0 \\ V_2 - p\ell/2 \\ -p\ell^2/12 \\ V_3 - p\ell/2 \\ p\ell^2/12 \end{Bmatrix}.$$

Înlăturând prima, a treia și a cincea linie și coloană se obține

$$\frac{EI}{\ell^3} \begin{bmatrix} 4\ell^2 & 2\ell^2 & 0 \\ 2\ell^2 & 8\ell^2 & 2\ell^2 \\ 0 & 2\ell^2 & 4\ell^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_2 \\ Q_4 \\ Q_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -p\ell^2/12 \\ p\ell^2/12 \end{Bmatrix}.$$

Din prima ecuație se obține deplasarea

$$Q_2 = \begin{bmatrix} -1/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_4 \\ Q_6 \end{Bmatrix} \quad (a)$$

care este înlocuită în sistemul format de a doua și a treia ecuație

$$\frac{EI}{\ell^3} \left(\begin{Bmatrix} 2\ell^2 \\ 0 \end{Bmatrix} Q_2 + \begin{bmatrix} 8\ell^2 & 2\ell^2 \\ 2\ell^2 & 4\ell^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_4 \\ Q_6 \end{Bmatrix} \right) = \frac{p\ell^2}{12} \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix},$$

ale cărui soluții sunt rotirile

$$\varphi_2 = Q_4 = -\frac{p\ell^3}{48EI}, \quad \varphi_3 = Q_6 = \frac{p\ell^3}{32EI}. \quad (b)$$

Înlocuind rotirile (b) în expresia (a) se obține rotirea

$$\varphi_1 = Q_2 = \frac{p\ell^3}{96EI}.$$

Reacțiunile se calculează din ecuațiile omise

$$\frac{EI}{\ell^3} \begin{bmatrix} 6\ell & 6\ell & 0 \\ -6\ell & 0 & 6\ell \\ 0 & -6\ell & -6\ell \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_2 \\ Q_4 \\ Q_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 - p\ell/2 \\ V_3 - p\ell/2 \end{Bmatrix}$$

rezultând

$$V_1 = -\frac{p\ell}{16}, \quad V_2 = \frac{5}{8}p\ell, \quad V_3 = \frac{7}{16}p\ell.$$

Exemplul 5.6

Să se calculeze săgeata și rotirea (panta) în punctul 2 al grinzii încărcate cu o sarcină triunghiulară din figura E5.6.

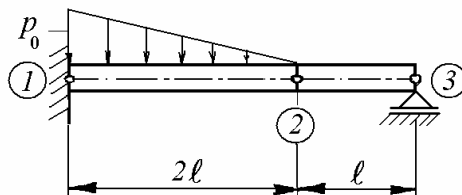


Fig. E5.6

Rezolvare. Se modelează grinda cu două elemente finite de tip Bernoulli-Euler. Utilizând condițiile la limită $Q_1 = Q_2 = Q_5 = 0$, sistemul ecuațiilor de echilibru se scrie matricial sub forma

$$\frac{EI}{\ell^3} \begin{bmatrix} 1,5 & 1,5\ell & -1,5 & 1,5\ell & 0 & 0 \\ 1,5\ell & 2\ell^2 & -1,5\ell & \ell^2 & 0 & 0 \\ -1,5 & -1,5\ell & 13,5 & 4,5\ell & -12 & 6\ell \\ 1,5\ell & \ell^2 & 4,5\ell & 6\ell^2 & -6\ell & 2\ell^2 \\ 0 & 0 & -12 & -6\ell & 12 & -6\ell \\ 0 & 0 & 6\ell & 2\ell^2 & -6\ell & 4\ell^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ 0 \\ Q_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} V_1 - 0,7p_0\ell \\ M_1 - 0,2p_0\ell^2 \\ -0,3p_0\ell \\ 0,1333p_0\ell^2 \\ V_3 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Înlăturând prima, a doua și a cincea linie și coloană se obține

$$\frac{EI}{\ell^3} \begin{bmatrix} 13,5 & 4,5\ell & 6\ell \\ 4,5\ell & 6\ell^2 & 2\ell^2 \\ 6\ell & 2\ell^2 & 4\ell^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_3 \\ Q_4 \\ Q_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,3p_0\ell \\ 0,1333p_0\ell^2 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Din ultima ecuație se obține deplasarea

$$Q_6 = -\frac{3}{2\ell}Q_3 - \frac{1}{2}Q_4$$

care este înlocuită în sistemul format din primele două ecuații

$$\frac{EI}{\ell^3} \left(\begin{bmatrix} 13,5 & 4,5\ell \\ 4,5\ell & 6\ell^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_3 \\ Q_4 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 6\ell \\ 2\ell^2 \end{Bmatrix} Q_6 \right) = \begin{Bmatrix} -0,3p_0\ell \\ 0,1333p_0\ell^2 \end{Bmatrix},$$

ale cărui soluții sunt

$$v_2 = Q_3 = -0,084 \frac{p_0\ell^4}{EI}, \quad \varphi_2 = Q_4 = 0,0518 \frac{p_0\ell^3}{EI}.$$

Exemplul 5.7

Să se determine expresiile funcțiilor de formă pentru elementul de grindă cu 3 noduri din figura E5.7, apoi să se reprezinte grafic.

Răspuns.

$$N_1(r) = \frac{1}{4} r^2 (4 - 5r - 2r^2 + 3r^3), \quad N_2(r) = \frac{1}{4} r^2 (1 - r - r^2 + r^3),$$

$$N_3(r) = (1-r^2)^2, \quad N_4(r) = r(1-r^2)^2,$$

$$N_5(r) = \frac{1}{4} r^2 (4+5r-2r^2-3r^3), \quad N_6(r) = \frac{1}{4} r^2 (-1-r+r^2+r^3).$$

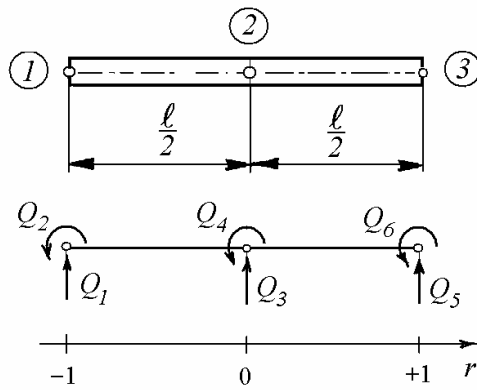


Fig. E5.7, a

Functii de forma pentru elementul de grinda cu trei noduri

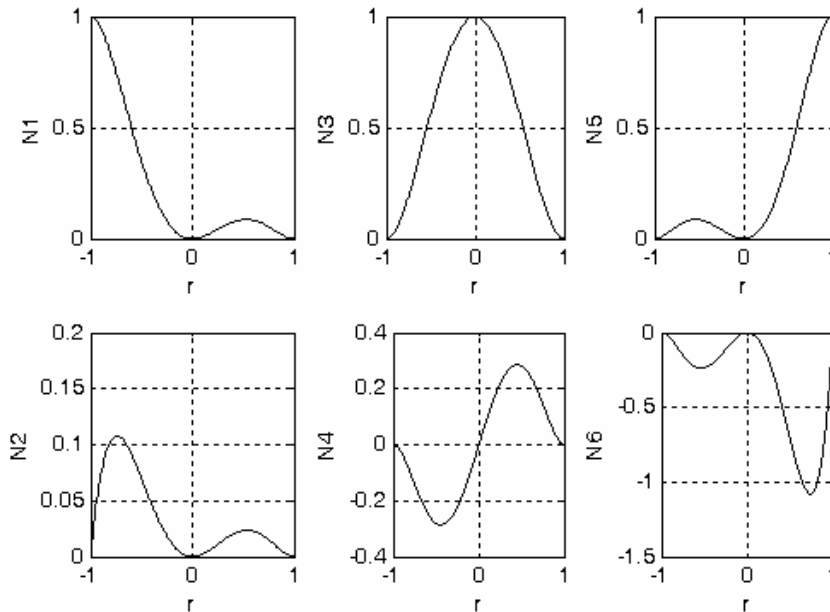


Fig. E5.7, b

Exemplul 5.8

Bara cotită plană din fig. E5.8, *a* este articulată la capete și încărcată în 2 cu o forță orizontală $F = 1000 \text{ N}$. Se cunosc $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$, $A = 1600 \text{ mm}^2$ și $I = 2 \cdot 10^5 \text{ mm}^4$. Să se determine deplasările nodale și să se traseze diagramele forței axiale, forței tăietoare și a momentului încovoietor.

Rezolvare. Bara este modelată cu 6 elemente și 7 noduri.

Date referitoare la noduri

Nodul nr	Blocaj			Coord		Deplasarea		Rotirea Z
	X	Y	Z	X	Y	X	Y	
1	1	1	0	0	0	0	0	-1.232e-2
2	0	0	0	0	1	0,010	8.500e-7	-5.531e-3
3	0	0	0	0	2	1.0699e-2	1.700e-6	2.353e-3
4	0	0	0	0,5	2	1.0698e-2	1.309e-3	2.592e-3
5	0	0	0	1,4	2	1.0697e-2	2.321e-3	-1.260e-3
6	0	0	0	2	2	1.0696e-2	-8.500e-7	-6.889e-3
7	1	1	0	2	1	0	0	-1.260e-2

Forma deformată este prezentată în fig. E5.8, *b*.

Diagramele forței axiale N , forței tăietoare T și a momentului încovoietor M sunt date în figurile E5.8, *c*, *d*, *e*.

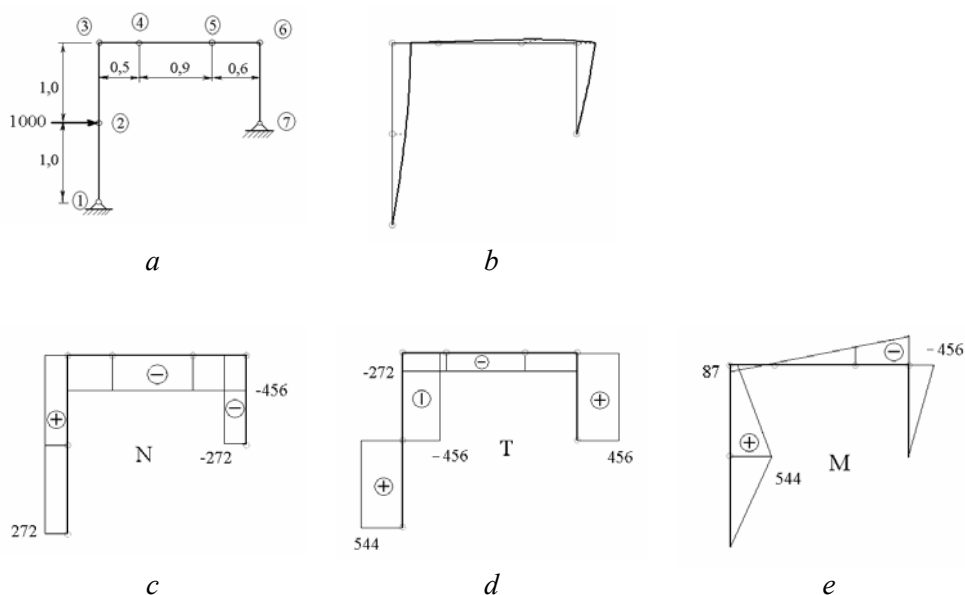
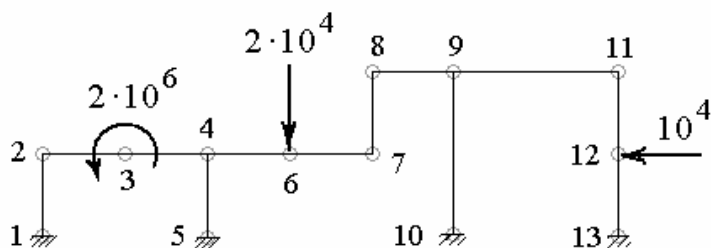


Fig. E5.8

Exemplul 5.9

Cadrul plan din fig. E5.9, *a* este încastrat în punctele 1, 5, 10, 13 și solicitat de un moment $M_3 = 2 \cdot 10^6$ Nmm și de două forțe concentrate $F_6 = -2 \cdot 10^4$ N și $F_{12} = -10^4$ N. Considerând $E = 2 \cdot 10^5$ N/mm², $A = 400$ mm², $I = 2 \cdot 10^4$ mm⁴, $\ell_{1-2} = 100$ mm și $\ell_{9-10} = \ell_{9-11} = 200$ mm, să se calculeze deplasările în punctul 6 și să se traseze forma deformată.

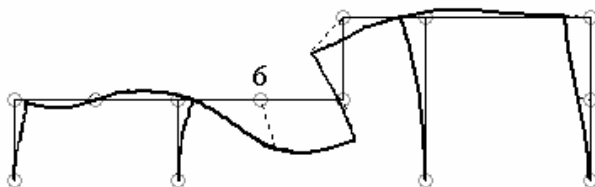
Răspuns. Cadrul este modelat cu 12 elemente *beam* și 13 noduri.

Fig. E5.9, *a*

Deplasările în punctul 6 sunt

$$h_6 = 0,2476 \text{ mm}, \quad v_6 = -0,9673 \text{ mm}, \quad \varphi_6 = -0,00623 \text{ rad}.$$

Forma deformată este prezentată în figura E5.9, *b*.

Fig. E5.9, *b*

5.8 Grilaje

Grilajele sunt cadre plane solicitate de forțe perpendiculare pe planul acestora. Ele sunt cazuri speciale de cadre tridimensionale în care fiecare punct are doar trei deplasări nodale, o translație și două rotiri, rezultate din acțiuni de forfecare (neglijabile), încovoiere și răsucire.

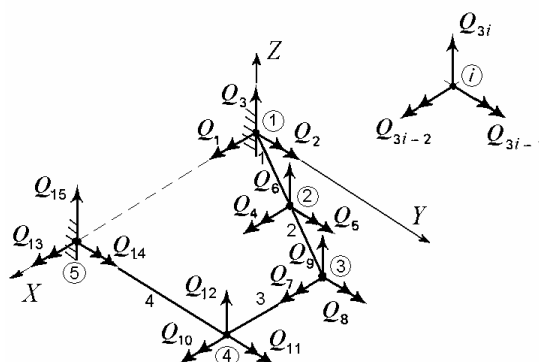


Fig. 5.11

5.8.1 Discretizarea cu elemente finite

Grilajul este împărțit în elemente, ca în exemplul din fig. 5.11. Fiecare nod are trei grade de libertate, două rotiri și o deplasare liniară, perpendiculară pe planul grilajului. Gradele de libertate ale nodului i sunt Q_{3i-2} – rotația față de axa X , Q_{3i-1} – rotația față de axa Y și Q_{3i} – deplasarea în lungul axei Z .

Nodurile sunt localizate prin coordonatele lor în sistemul de referință global XOY iar conectivitatea elementelor este definită prin indicii nodurilor. Elementele sunt modelate ca bare cu secțiunea constantă, solicitate la încovoiere și răsucire, fără deformații de forfecare și fără sarcini între noduri. Proprietățile caracteristice sunt modulele de rigiditate la încovoiere EI și la răsucire GI_t , și lungimea ℓ . Se consideră doar bare cu secțiuni al căror centru de forfecare coincide cu centrul de greutate.

5.8.2 Matricea de rigiditate a elementului de grilaj în coordonate locale

Se consideră un element de grilaj înclinat, ca în fig. 5.12, a , în care se arată deplasările nodale în coordonate locale și în coordonate globale.

În sistemul local de coordonate fizice, axa x , orientată în lungul barei, este înclinată cu unghiul α față de axa globală X . Axa z a sistemului local de coordonate este coliniară cu axa Z a sistemului global. Alternativ, se mai poate folosi un sistem de coordonate intrinseci (naturale).

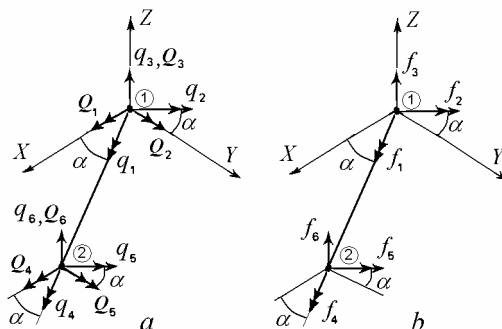


Fig. 5.12

Vectorul deplasărilor nodale ale elementului este

$$\{q^e\} = [q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4 \quad q_5 \quad q_6]^T \quad (5.68)$$

iar vectorul corespunzător al forțelor nodale ale elementului se poate scrie

$$\{f^e\} = [f_1 \quad f_2 \quad f_3 \quad f_4 \quad f_5 \quad f_6]^T. \quad (5.69)$$

În (5.69) f_3 , f_6 sunt forțe tăietoare, iar f_2 , f_5 sunt cupluri care produc încovoiere (fig. 5.12, b). În (5.68) deplasările q_3 , q_6 sunt translații, în timp ce q_2 , q_5 sunt rotații. Vectorii coloană corespunzători sunt legați prin matricea de rigiditate la încovoiere.

Rearanjând matricea (5.29) rezultă

$$\begin{Bmatrix} f_2 \\ f_3 \\ f_5 \\ f_6 \end{Bmatrix} = \frac{EI_e}{l_e^3} \begin{bmatrix} 4l^2 & -6l & 2l^2 & 6l \\ -6l & 12 & -6l & -12 \\ 2l^2 & -6l & 4l^2 & 6l \\ 6l & -12 & 6l & 12 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_2 \\ q_3 \\ q_5 \\ q_6 \end{Bmatrix}. \quad (5.70)$$

Forțele nodale axiale f_1 , f_4 sunt cupluri de răsucire iar deplasările nodale q_1 , q_4 sunt unghiuri de răsucire. Deoarece descriu efecte torsionale, acțiunea lor

este decuplată de încovoiere. Matricea de rigiditate respectivă poate fi calculată separat. Ea se calculează la fel ca matricea de rigiditate pentru solicitări axiale.

Unghiul de răsucire, exprimat prin funcțiile de formă (4.51)

$$\theta(r) = N_1(r) q_1 + N_2(r) q_4, \quad (5.71)$$

poate fi înlocuit în expresia energiei de deformație

$$U_e = \frac{GI_{te}}{2} \int_e \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 dx. \quad (5.72)$$

După trecerea la coordonate naturale se obține matricea de rigiditate pentru torsiune

$$[k_t^e] = \frac{2GI_{te}}{\ell_e} \int_{-1}^{+1} [N_r']^T [N_r'] dr. \quad (5.73)$$

Datorită acestei analogii, forțele nodale pot fi exprimate în funcție de deplasările nodale prin relația

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_4 \end{Bmatrix} = [k_t^e] \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_4 \end{Bmatrix} \quad (5.74)$$

în care matricea de rigiditate pentru torsiune este

$$[k_t^e] = \frac{GI_{te}}{\ell_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.75)$$

În expresia (5.75), G este modulul de elasticitate transversal iar I_{te} este momentul de inerție la răsucire al secțiunii transversale. În cazul secțiunilor axial-simetrice, această constantă este momentul de inerție polar.

Pentru elementul de grilaj, combinând elementele matricilor de rigiditate (5.70) și (5.75), se obține matricea de rigiditate în coordonate locale, care exprimă forțele nodale (5.69) în funcție de deplasările nodale (5.68)

$$[k^e] = \frac{EI_e}{\ell_e^3} \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 4\ell^2 & -6\ell & 0 & 2\ell^2 & 6\ell \\ 0 & -6\ell & 12 & 0 & -6\ell & -12 \\ -a & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 2\ell^2 & -6\ell & 0 & 4\ell^2 & 6\ell \\ 0 & 6\ell & -12 & 0 & 6\ell & 12 \end{bmatrix}_e \quad (5.76)$$

unde $a = GI_{te}\ell_e^2/EI_e$.

5.8.3 Transformarea coordonatelor

Înainte de asamblarea în matricea globală a grilajului, este necesară transformarea matricii (5.76) din sistemul local în sistemul global de coordonate. Deoarece direcția z a axelor locale coincide cu direcția Z a axelor globale, trebuie transformate doar rotirile.

Transformarea coordonatelor este definită de relația

$$\{q^e\} = [T^e] \{Q^e\}, \quad (5.77)$$

în care $\{q^e\}$ este vectorul deplasărilor elementului (5.68) în sistemul de coordonate locale,

$$\{Q^e\} = [Q_1 \ Q_2 \ Q_3 \ Q_4 \ Q_5 \ Q_6]^T$$

este vectorul deplasărilor elementului în sistemul de coordonate global (fig. 5.12) și

$$[T^e] = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (5.78)$$

în care $c = \cos \alpha$ și $s = \sin \alpha$, este *matricea de transformare* de la coordonate locale la coordonate globale.

Aceeași matrice (5.78) este utilizată pentru transformarea forțelor nodale din coordonate locale în coordonate globale.

5.8.4 Matricea de rigiditate a unui element în coordonate globale

Matricea de rigiditate a unui element de grilaj în coordonate globale se obține la fel ca pentru elementele de cadru, pe baza relației

$$[K^e] = [T^e]^T [k^e] [T^e]. \quad (5.79)$$

Aceasta este utilizată la asamblarea matricii de rigiditate globale nereduse $[\bar{K}]$, folosind matricile de conectivitate ale elementelor $[\tilde{T}^e]$, care exprimă legătura între deplasările nodale ale fiecărui element și deplasările nodale ale întregii structuri, prin relații de forma (5.64).

La sisteme sprijinite pe reazeme, matricea neredusă $[\bar{K}]$ este condensată utilizând condițiile la limită.

Efectul reazemelor elastice poate fi luat în considerare adăugând rigiditățile acestora direct în matricea de rigiditate globală, în locația corespunzătoare de pe diagonala principală.

Exemplul 5.10

Grilajul din fig. E5.10 este încastrat în punctele 1 și 2, are $E = 210 \text{ GPa}$, $G = 81 \text{ GPa}$, $\ell = 1 \text{ m}$ și diametrul barelor $d = 20 \text{ mm}$. Se cere să se calculeze deplasarea verticală a punctului 7 sub acțiunea forțelor $F_7 = F_8 = -500 \text{ N}$ și să se traseze forma deformată.

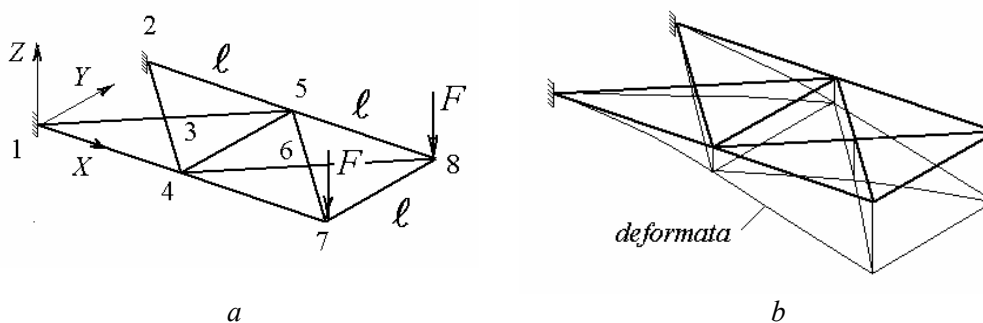


Fig. E5.10

Răspuns. Grilajul este modelat cu 14 elemente și 8 noduri, având în total 18 grade de libertate. Forma deformată este prezentată în figura E5.10, b. Deplasarea cerută este $w_7 = -0,436 \text{ m}$.

Exemplul 5.11

Grilajul din fig. E5.11, a este încastrat în punctele 1 și 2, și are $\ell = 1 \text{ m}$, $I = 0,785 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4$, $I_t = 1,57 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4$, $E = 210 \text{ GPa}$ și $G = 81 \text{ GPa}$. Se cere să se calculeze deplasarea verticală a punctului 5 când grilajul este încărcat cu o forță $F_5 = -10^3 \text{ N}$. Să se deseneze forma deformată și diagramele momentelor încovoietoare și de răsucire.

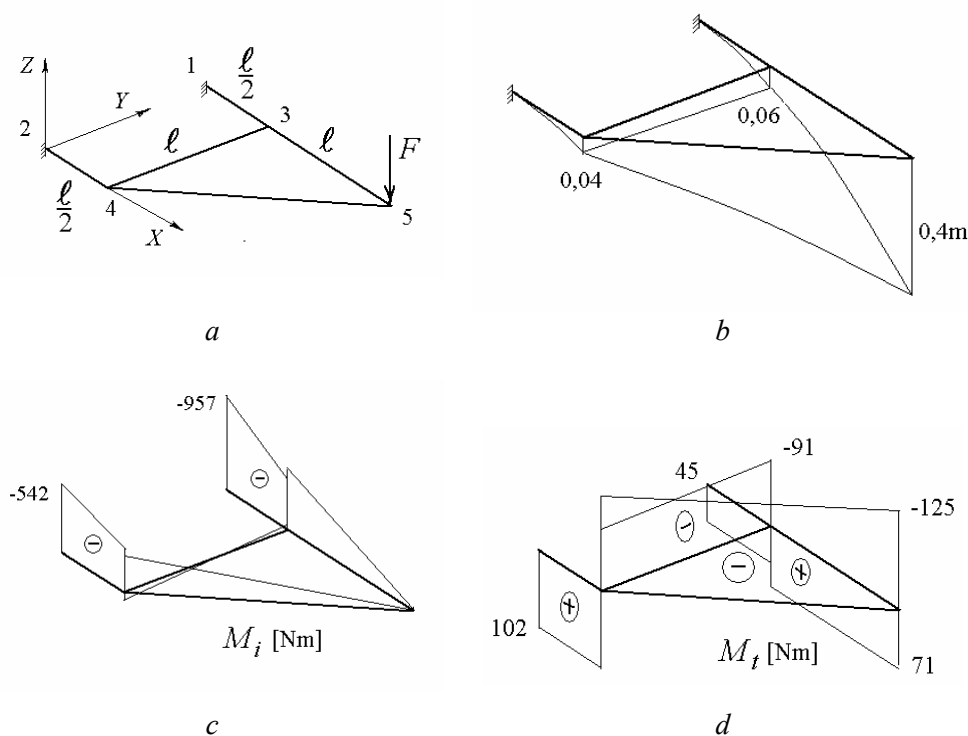


Fig. E5.11

Răspuns. Grilajul este modelat cu 5 elemente și 5 noduri, având 9 grade de libertate. Deplasarea maximă este $w_5 = -0,4\text{ m}$. Forma deformată este prezentată în fig. E5.11, *b*. Diagrama momentelor încovoietoare este arătată în figura E5.11, *c* și cea a momentelor de răsucire – în figura E5.11, *d*.

5.9 Elementul de grindă cu forfecare

Deformațiile de forfecare devin importante la grinzi relativ groase, la care ipoteza lui Bernoulli nu mai este valabilă. Distribuția neliniară (parabolică) a tensiunilor tangențiale pe înălțimea secțiunii produce deplanarea acesteia.

Se adoptă o ipoteză simplificatoare (Bresse, 1859) prin care se consideră un unghi de lunecare specifică medie constant pe toată secțiunea transversală. Secțiunile transversale plane rămân astfel nedistorsionate (plane) dar înclinate față de axa barei. Ipoteza stă la baza formulării elementului de grindă Timoshenko utilizat în studiul vibrațiilor.

5.9.1 Analiza unei grinzi cu lunecări specifice constante pe grosime

Se consideră grinzi cu secțiunea transversală simetrică față de planul sarcinilor aplicate (fig. 5.13, *a*). Asupra grinzii acționează doar sarcini transversale, forțele axiale fiind neglijate.

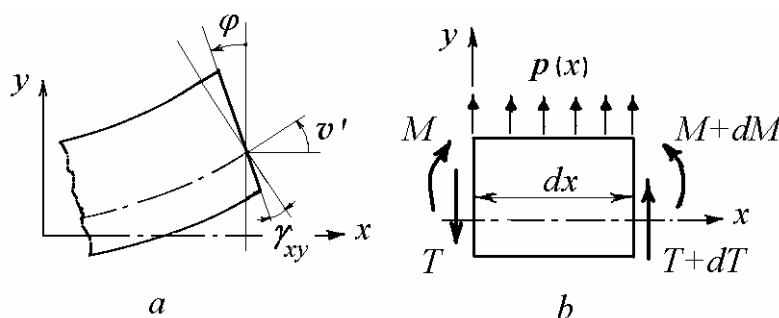


Fig. 5.13

Deplasarea axială a unui punct din secțiunea transversală, situat la distanța y de axa neutră, este aproximativ

$$u(x, y) = -y \varphi(x), \quad (5.80)$$

unde φ este rotirea secțiunii transversale la distanța x .

Deformațiile specifice ε_x și γ_{xy} au următoarele expresii

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} = -y \frac{d\varphi}{dx} = -y \varphi', \quad (5.81)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -\varphi + \frac{dv}{dx} = -\varphi + v', \quad (5.82)$$

unde v' este panta axei deformată a grinzii.

Se observă că panta v' nu mai este egală cu rotirea φ , ca în teoria Bernoulli-Euler.

Tensiunile normale din secțiunea transversală sunt date de legea lui Hooke

$$\sigma_x = E \varepsilon_x = -E \frac{d\varphi}{dx} y, \quad (5.83)$$

în care E este modulul de elasticitate longitudinal al materialului.

Momentul încovoietor se calculează pe baza distribuției tensiunilor normale pe înălțimea secțiunii transversale

$$M(x) = - \int_A \sigma_x y \, dA = EI_z \frac{d\varphi}{dx} = EI_z \varphi' \quad (5.84)$$

unde I_z este momentul de inerție axial al secțiunii transversale.

Se adoptă convenția de semne (fig. 5.13, *b*) conform căreia forțele tăietoare și momentele încovoietoare pozitive acționează în sensul pozitiv (negativ) al axelor de coordonate pe secțiunile transversale cu normala exterioară pozitivă (negativă).

Forța tăietoare este dată de

$$T(x) = - \frac{dM}{dx}. \quad (5.85)$$

Sarcina transversală pe unitatea de lungime a grinzii este

$$p(x) = - \frac{dT}{dx}. \quad (5.86)$$

Unghiul de alunecare specifică mediu este

$$\gamma_{xy} = \frac{T}{GA_s} = \frac{T}{\kappa AG} \quad (5.87)$$

unde G este modulul de elasticitate transversal, κ este un factor de forfecare și A_s este 'aria suprafeței de forfecare efective' calculată cu relația

$$A_s = \frac{\left[\int \tau \, dA \right]^2}{\int \tau^2 \, dA}. \quad (5.88)$$

Din relațiile (5.82) și (5.87) rezultă

$$T = GA_s (v' - \varphi). \quad (5.89)$$

Pentru o grindă cu secțiunea constantă neîncărcată între capete ($p=0$), prin eliminarea lui M și T se obțin ecuațiile diferențiale de echilibru

$$GA_s v'' - GA_s \varphi' = 0, \quad (5.90)$$

$$GA_s v' + EI_z \varphi'' - GA_s \varphi = 0. \quad (5.91)$$

5.9.2 Funcțiile de formă

Fie un element de grindă (fig. 5.14) de lungime ℓ (se omite indicele e) neîncărcată între capete ($p=0$). Utilizând coordonate naturale, $r = 2x/\ell$.

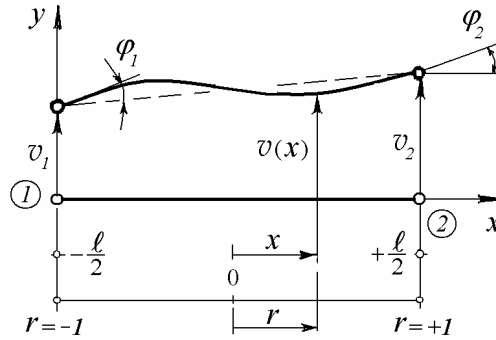


Fig. 5.14

Eliminând φ și v pe rând în (5.90) și (5.91) se obține

$$\frac{d^4 v}{dx^4} = 0 \quad \text{și} \quad \frac{d^3 \varphi}{dx^3} = 0. \quad (5.92)$$

Trecând la coordonatele r rezultă

$$\frac{d^4 v}{dr^4} = 0 \quad \text{și} \quad \frac{d^3 \varphi}{dr^3} = 0. \quad (5.93)$$

Soluțiile generale ale acestor ecuații sunt

$$v(r) = a_4 r^3 + a_3 r^2 + a_2 r + a_1, \quad (5.94)$$

$$\varphi(r) = b_3 r^2 + b_2 r + b_1. \quad (5.95)$$

Cele șapte constante de integrare nu sunt independente deoarece soluțiile de mai sus trebuie să satisfacă ecuația (5.91) care, în noua variabilă r , devine

$$\frac{2}{\ell} \frac{dv}{dr} + \beta \frac{d^2 \varphi}{dr^2} - \varphi = 0, \quad (5.96)$$

în care

$$\beta = \frac{4EI_z}{GA_s \ell^2}. \quad (5.97)$$

Înlocuind (5.94) și (5.95) în ecuația (5.96) rezultă

$$b_3 = \frac{6}{\ell} a_4, \quad b_2 = \frac{4}{\ell} a_3, \quad b_1 = \frac{2}{\ell} a_2 + \beta \frac{12}{\ell} a_4. \quad (5.98)$$

Rămân astfel numai patru constante independente care se determină calculând (5.94) și (5.95) la $r = \pm 1$. Rezultă următoarele expresii ale deplasărilor

$$v = \begin{bmatrix} N_1 & \frac{\ell}{2}N_2 & N_3 & \frac{\ell}{2}N_4 \end{bmatrix} \{q^e\} = [N] \{q^e\}, \quad (5.99)$$

$$\varphi = \begin{bmatrix} \frac{2}{\ell}\tilde{N}_1 & \tilde{N}_2 & \frac{2}{\ell}\tilde{N}_3 & \tilde{N}_4 \end{bmatrix} \{q^e\} = [\tilde{N}] \{q^e\}, \quad (5.100)$$

unde

$$\{q^e\} = [v_1 \ \varphi_1 \ v_2 \ \varphi_2]^T. \quad (5.101)$$

Funcțiile de formă au expresiile

$$\begin{aligned} N_1(r) &= \frac{1}{4(1+3\beta)} [2-3r+r^3+6\beta(1-r)], \\ N_2(r) &= \frac{1}{4(1+3\beta)} [1-r-r^2+r^3+3\beta(1-r^2)], \\ N_3(r) &= \frac{1}{4(1+3\beta)} [2+3r-r^3+6\beta(1+r)], \\ N_4(r) &= \frac{1}{4(1+3\beta)} [-1-r+r^2+r^3+3\beta(-1+r^2)], \\ \tilde{N}_1(r) &= \frac{1}{4(1+3\beta)} (-3+3r^2), \\ \tilde{N}_2(r) &= \frac{1}{4(1+3\beta)} [-1-2r+3r^2+6\beta(1-r)], \\ \tilde{N}_3(r) &= \frac{1}{4(1+3\beta)} (3-3r^2), \\ \tilde{N}_4(r) &= \frac{1}{4(1+3\beta)} [-1+2r+3r^2+6\beta(1+r)]. \end{aligned} \quad (5.102)$$

Pentru $\beta = 0$, primele patru funcții (5.102) devin polinoamele hermitiene de gradul trei (5.21) iar ultimele patru funcții satisfac relațiile

$$\tilde{N}_i(r) = \frac{2}{\ell} \frac{\partial N_i}{\partial r} \quad (i = 1, \dots, 4). \quad (5.103)$$

Pentru calculul matricii de rigiditate a unui element este utilă introducerea unor funcții de formă definite astfel

$$[\hat{N}] = [\tilde{N}] - \frac{2}{\ell} \left[\frac{dN}{dr} \right]. \quad (5.104)$$

Acestea au expresiile

$$\hat{N}_1(r) = \hat{N}_2(r) = -\hat{N}_3(r) = \hat{N}_4(r) = \frac{3\beta}{1+3\beta} \frac{1}{\ell}. \quad (5.105)$$

5.9.3 Matricea de rigiditate

Energia de deformație a unui element de grindă cu efecte de forfecare incluse este

$$U_e = \frac{EI_z}{2} \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 dx + \frac{GA_s}{2} \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \left(\varphi - \frac{dv}{dx} \right)^2 dx. \quad (5.106)$$

Deoarece

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{2}{\ell} \frac{d\varphi}{dr} \quad \text{și} \quad dx = \frac{\ell}{2} dr, \quad (5.107)$$

contribuția datorită încovoierii este

$$U_e^B = \frac{EI_z}{2} \frac{2}{\ell} \int_{-1}^{+1} \left(\frac{d\varphi}{dr} \right)^2 dr, \quad (5.108)$$

iar contribuția datorită forfecării este

$$U_e^S = \frac{GA_s}{2} \frac{\ell}{2} \int_{-1}^{+1} \left(\varphi - \frac{2}{\ell} \frac{dv}{dr} \right)^2 dr. \quad (5.109)$$

Înlocuind (5.100) în (5.108) rezultă

$$U_e^B = \frac{1}{2} \{ q^e \}^T EI_z \frac{2}{\ell} \int_{-1}^{+1} [\tilde{N}']^T [\tilde{N}'] dr \{ q^e \} \quad (5.110)$$

de unde se obține matricea de rigiditate a elementului datorită încovoierii

$$[k_B^e] = EI_z \frac{2}{\ell} \int_{-1}^{+1} [\tilde{N}']^T [\tilde{N}'] dr. \quad (5.111)$$

Înlocuind (5.100) și (5.99) în (5.109) rezultă

$$U_e^S = \frac{1}{2} \{q^e\}^T G A_s \frac{\ell}{2} \int_{-1}^{+1} [\hat{N}]^T [\hat{N}] dr \{q^e\} \quad (5.112)$$

de unde se obține matricea de rigiditate a elementului datorită forfecării

$$[k_S^e] = G A_s \frac{\ell}{2} \int_{-1}^{+1} [\hat{N}]^T [\hat{N}] dr. \quad (5.113)$$

Înlocuind funcțiile de formă (5.102) și (5.105) și calculând integralele se obține matricea de rigiditate

$$[k^e] = \frac{1}{1+3\beta} \frac{EI_z}{\ell^3} \begin{bmatrix} 12 & 6\ell & -12 & 6\ell \\ 6\ell & (4+3\beta)\ell^2 & -6\ell & (2-3\beta)\ell^2 \\ -12 & -6\ell & 12 & -6\ell \\ 6\ell & (2-3\beta)\ell^2 & -6\ell & (4+3\beta)\ell^2 \end{bmatrix}. \quad (5.114)$$

Vectorul forțelor nodale coerente este identic cu vectorul corespunzător (5.42) calculat pentru o grindă subțire.

6.

ELEMENTE DE ELASTICITATE LINIARĂ

În acest capitol se prezintă concepte fundamentale din teoria liniară a elasticității, cu accent pe problemele bidimensionale. Cele patru grupe mari de ecuații sunt scrise în forma matricială specifică A.E.F.: a) ecuațiile de echilibru, b) ecuațiile de compatibilitate sau relațiile între deformații specifice și deplasări, c) relațiile între tensiuni și deformații specifice sau legea lui Hooke și d) condițiile la limită.

6.1 Notăția matricială pentru sarcini, tensiuni și deformații specifice

În fig. 6.1 se arată un corp tridimensional cu forma arbitrară și volum V , în echilibru sub acțiunea sarcinilor exterioare și a reacțiunilor din reazeme. Suprafața totală S a corpului are două părți distincte: S_u , porțiunea de frontieră pe care sunt prescrise deplasările, și S_σ , porțiunea pe care sunt prescrise sarcinile de suprafață.

În interiorul corpului, punctele sunt localizate prin coordonatele x, y, z . Orice punct de pe suprafață are o normală exterioară n a cărei orientare este descrisă de cosinusurile directoare $\partial n/\partial x, \partial n/\partial y, \partial n/\partial z$.

În general, se disting trei feluri de sarcini aplicate: a) sarcini volumice, b) sarcini de suprafață și c) forțe concentrate.

Sarcini distribuite în volum

Sarcinile interioare distribuite în volumul V pot fi forțe de inerție, cum sunt forțele centrifuge, sau greutatea proprie. Intensitatea lor pe unitatea de volum este definită prin componentele p_{vx}, p_{vy}, p_{vz} . Matricial, acestea sunt descrise convenabil printr-un vector al sarcinilor volumice

$$\{p_v\} = [p_{vx} \quad p_{vy} \quad p_{vz}]^T. \quad (6.1)$$

Sarcini de suprafață

Pot exista de asemenea sarcini de suprafață (nu neapărat presiuni normale) distribuite pe suprafața S_σ , definite prin intensitatea pe unitatea de suprafață, având trei componente

$$\{p_s\} = [p_{sx} \quad p_{sy} \quad p_{sz}]^T. \quad (6.2)$$

Forțe concentrate

Forțele concentrate se definesc prin cele trei componente

$$\{F_i\} = [F_{ix} \quad F_{iy} \quad F_{iz}]^T. \quad (6.3)$$

Orice sistem de sarcini are componente din cel puțin una din cele trei categorii (6.1)–(6.3).

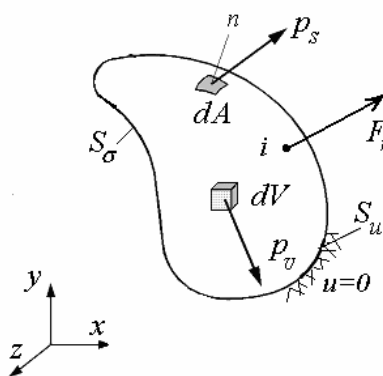


Fig. 6.1

Deplasări

Se formează un vector al deplasărilor

$$\{u\} = [u \quad v \quad w]^T, \quad (6.4)$$

în care u, v, w sunt componentele deplasărilor în interiorul corpului sau pe suprafața S_σ cu deplasări nespecificate.

Tensiuni și deformații specifice

Tensiunile din volumul V au două tipuri de componente, tensiuni normale $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ și tensiuni tangențiale $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$. Este convenabil să se reprezinte atât tensiunile cât și deformațiile specifice prin vectori coloană. Astfel, vectorul tensiunilor este

$$\{\sigma\} = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx}]^T. \quad (6.5)$$

În probleme bidimensionale, în planul xOy ,

$$\{\sigma\} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_y & \tau_{xy} \end{bmatrix}^T. \quad (6.5, a)$$

Vectorul deformațiilor specifice se scrie

$$\{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_y & \varepsilon_z & \gamma_{xy} & \gamma_{yz} & \gamma_{zx} \end{bmatrix}^T. \quad (6.6)$$

În probleme bidimensionale, în planul xOy ,

$$\{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_y & \gamma_{xy} \end{bmatrix}^T. \quad (6.6, a)$$

6.2 Ecuțiile de echilibru în volumul V

În figura 6.2 se prezintă tensiunile care acționează asupra unui element infinitesimal în planul xOy . Sarcinile volumice sunt echilibrate de creșterile incrementale liniare ale tensiunilor de pe fețele elementului, ceea ce conduce la următoarele ecuații de echilibru, în care $\tau_{xy} = \tau_{yx}$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + p_{vx} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + p_{vy} &= 0. \end{aligned} \quad (6.7)$$

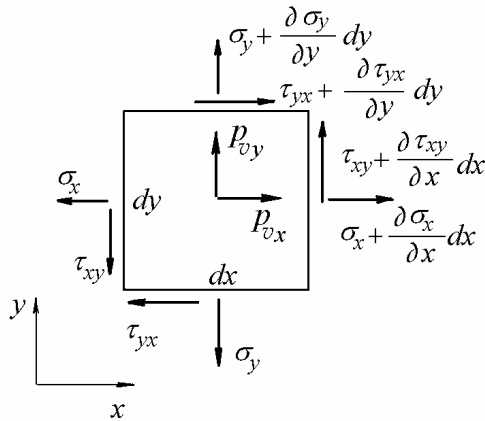


Fig. 6.2

În formă matricială, ecuațiile (6.7) pot fi scrise

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} P_{vx} \\ P_{vy} \end{Bmatrix} \quad (6.8)$$

sau, introducând matricea operatorilor de derivare

$$[\partial] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad (6.9)$$

și utilizând notația (6.1)

$$[\partial]^T \{\sigma\} + \{p_v\} = \{0\}. \quad (6.10)$$

6.2 Ecuațiile de echilibru pe suprafața S_σ

Se consideră un element elastic situat lângă frontiera S_σ . Ecuațiile de echilibru pe direcțiile axelor de coordonate se scriu

$$\begin{aligned} \sigma_x \ell + \tau_{yx} m &= p_{sx}, \\ \tau_{xy} \ell + \sigma_y m &= p_{sy}. \end{aligned} \quad (6.11)$$

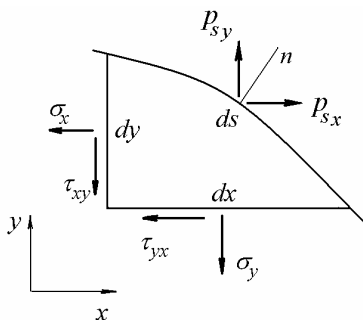


Fig. 6.3

În relațiile (6.11) cosinusurile directe ale normalei exterioare n sunt

$$\begin{aligned} \ell = \cos(n, x) &= \frac{\partial n}{\partial x} = n_x, \\ m = \cos(n, y) &= \frac{\partial n}{\partial y} = n_y. \end{aligned} \quad (6.12)$$

În formă matricială, ecuațiile (6.11) se pot scrie

$$\begin{bmatrix} n_x & 0 & n_y \\ 0 & n_y & n_x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_{sx} \\ p_{sy} \end{Bmatrix}, \quad (6.13)$$

sau, în formă condensată

$$[n]^T \{\sigma\} = \{p_s\}, \quad (6.14)$$

uneori scrisă sub forma

$$[\partial^T n] \{\sigma\} = \{p_s\}, \quad (6.15)$$

unde $\partial^T n$ arată că operatorii din $[\partial]^T$ acționează asupra lui n .

6.3 Relațiile între deformații specifice și deplasări

În figura 6.4 se prezintă deformarea feței $dx - dy$ în ipoteza deplasărilor mici.

Ecuțiile de compatibilitate au forma familiară

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (6.16)$$

În formă matricială

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}, \quad (6.17)$$

sau condensat

$$\{\varepsilon\} = [\partial] \{u\}. \quad (6.18)$$

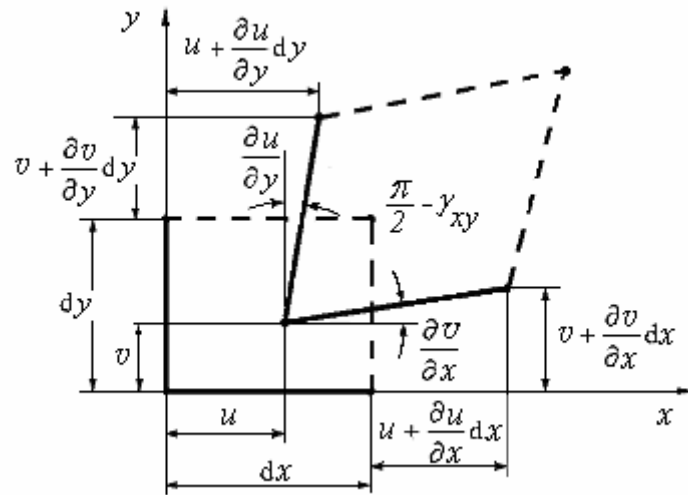


Fig. 6.4

6.4 Relațiile între tensiuni și deformații specifice

Pentru materiale elastice izotrope liniare, relațiile între tensiuni și deformații specifice rezultă din legea lui Hooke generalizată

$$\{\varepsilon\} = [C] \{\sigma\}, \quad (6.19)$$

în care *matricea de complianță elastică a materialului* este

$$[C] = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ \text{sim} & & & & 2(1+\nu) & 0 \\ & & & & & 2(1+\nu) \end{bmatrix}. \quad (6.20)$$

Relația inversă este

$$\{\sigma\} = [C]^{-1} \{\varepsilon\} = [D] \{\varepsilon\}. \quad (6.21)$$

Inversa lui $[C]$ este *matricea de rigiditate a materialului*

$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{2}-\nu & 0 & 0 \\ \text{sim} & & & & \frac{1}{2}-\nu & 0 \\ & & & & & \frac{1}{2}-\nu \end{bmatrix}. \quad (6.22)$$

Starea plană de tensiuni

Un corp plan subțire, solicitat de sarcini coplanare, se spune că este într-o stare plană de tensiuni. Dacă se anulează tensiunile σ_z , τ_{xz} , și τ_{yz} , eliminând liniile și coloanele 3, 5 și 6 în (6.20), legea lui Hooke se poate scrie

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}. \quad (6.23)$$

Prin inversare se obține

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}, \quad (6.24)$$

relație utilizată sub forma condensată $\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}$.

Starea plană de deformații specifice

Dacă un corp lung, cu secțiunea transversală constantă este solicitat de o sarcină transversală distribuită pe lungime, atunci un element de grosime mică din zona solicitată poate fi considerat într-o stare plană de deformații specifice. Dacă se anulează deformațiile specifice ε_z , γ_{xz} , și γ_{yz} , utilizând (6.21) și eliminând liniile și coloanele 3, 5 și 6 în (6.22), se obține

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (6.25)$$

care se poate scrie și sub forma $\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}$ în care $[D]$ are o expresie diferită de cea din relația (6.24).

6.5 Efecte termice

Deformațiile specifice termice sunt considerate ca deformații specifice inițiale

$$\{\varepsilon_0\} = [\alpha T \quad \alpha T \quad \alpha T \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T, \quad (6.26)$$

unde T este diferența de temperatură și α este coeficientul de dilatare termică liniară al materialului.

Relațiile între tensiuni și deformații specifice devin

$$\{\sigma\} = [D](\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\}). \quad (6.27)$$

În starea plană de tensiuni

$$\{\varepsilon_0\} = [\alpha T \quad \alpha T \quad 0]^T. \quad (6.28)$$

În starea plană de deformații specifice

$$\{\varepsilon_0\} = (1 + \nu)[\alpha T \quad \alpha T \quad 0]^T. \quad (6.29)$$

6.6 Energia de deformație

La materiale elastice liniare, energia de deformație specifică este

$$U_0 = \frac{1}{2} \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} = \frac{1}{2} \{\varepsilon\}^T \{\sigma\}. \quad (6.30)$$

Pentru corpul elastic din figura 6.1, energia de deformație totală este

$$U = \frac{1}{2} \int_V \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV. \quad (6.31)$$

Înlocuind (6.21) se obține energia de deformație în funcție de deformațiile specifice

$$U = \frac{1}{2} \int_V \{\varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon\} dV. \quad (6.32)$$

7.

METODE ENERGETICE

Metoda elementelor finite aplicată structurilor poate fi considerată o variantă a metodei Rayleigh-Ritz.

Metoda Rayleigh-Ritz clasică este un procedeu variațional prin care un sistem continuu este aproximat printr-un sistem discret, prin alegerea unei soluții a problemei diferențiale cu valori la limită sub forma unei serii finite de funcții admisibile. Din păcate, la sistemele cu geometrie complexă sau cu condiții la limită complicate nu se pot genera ușor funcții admisibile globale.

În metoda elementelor finite, soluția aproximativă se construiește utilizând funcții admisibile locale, definite pe subdomenii de dimensiuni reduse ale structurii. Aproximări suficient de bune se pot realiza cu polinoame de grad inferior. Deplasările se calculează cu metode bazate pe *principiul lucrului mecanic virtual* și/sau pe *principiul minimului energiei potențiale totale*.

În loc să se rezolve ecuații diferențiale cu condiții la limită complicate, în metoda elementelor finite se calculează integrale din funcții polinomiale relativ simple. Metodele variaționale impun condiții mai puțin stricte pentru funcțiile care aproximează câmpul de deplasări decât metodele analitice bazate pe ecuații diferențiale.

7.1 Principiul lucrului mecanic virtual (PLMV)

PLMV este o formulare a echilibrului static al unui sistem mecanic. În continuare se va utiliza forma cunoscută ca *principiul deplasărilor virtuale* (PDV), așa cum este aplicat corpurilor elastice.

7.1.1 Deplasările virtuale

Prin definiție, deplasările virtuale sunt:

- a) arbitrare (fictive, virtuale);

- b) infinitezimale (se supun regulilor calculului diferențial);
- c) necorelate cu deplasările reale sau cu forțele care le produc;
- d) continue în interiorul și la suprafața corpului;

În general, la bare și în probleme de elasticitate este necesară o continuitate de tip C^0 , în timp ce pentru grinzi, plăci și învelișuri se impune o continuitate de tip C^1 . Desigur există excepții.

Se reamintește că o funcție de mai multe variabile are o continuitate C^m într-un domeniu V dacă funcția și toate derivatele parțiale până la ordinul m inclusiv există și sunt continue în domeniul V .

e) cinematic admisibile, deci satisfac condițiile la limită geometrice ale sistemului (constrângerile geometrice).

Dacă ecuația diferențială a problemei este de ordinul $m = 2n$, funcțiile admisibile trebuie să aibă continuitate C^{n-1} , deci condițiile la limită geometrice trebuie satisfăcute până la derivata de ordinul $(n-1)$. La bare, $m = 2$ și funcțiile de aproximare trebuie să aibă continuitate C^0 .

La grinzi $m = 4$ și funcțiile de aproximare trebuie să aibă continuitate C^1 . Deoarece continuitatea necesară este redusă de la C^2 în ecuația diferențială la C^1 în ecuația variațională, funcționala se spune că are o “formă slabă”.

O deplasare virtuală se va nota cu ‘ δ ’ înaintea unei litere, de exemplu δu . Simbolul ‘ δ ’ a fost introdus de Lagrange pentru a sublinia caracterul virtual al variațiilor, spre deosebire de simbolul ‘d’ care denotă diferențierea.

Notând

$$\{u\} = [u \quad v \quad w]^T,$$

vectorul deplasărilor (6.4) în interiorul corpului sau pe suprafața S_σ cu deplasări neprescrise (fig. 6.1), vectorul *deplasărilor virtuale* se scrie

$$\{\delta u\} = [\delta u \quad \delta v \quad \delta w]^T. \quad (7.1)$$

Vectorul *deformațiilor specifice virtuale* corespunzătoare va fi

$$\{\delta \varepsilon\} = [B]\{\delta u\}. \quad (7.2)$$

unde $[B]$ este matricea care exprimă deformațiile specifice în funcție de deplasări.

7.1.2 Lucrul mecanic virtual al sarcinilor exterioare

La o bară sollicitată la întindere (fig. 7.1, *a*), lucrul mecanic virtual al forței exterioare F este

$$\delta W_E = F \cdot \delta u. \quad (7.3)$$

Acesta are aceeași valoare dacă materialul barei este liniar elastic (fig. 7.1, *b*) sau neliniar elastic (fig. 7.1, *c*). De notat că lucrul virtual este egal cu produsul forță \times deplasare, deoarece forța se menține constantă pe deplasarea virtuală, ultima fiind arbitrară, deci independentă de forță

În cazul general al încărcării cu sarcini volumice (6.1), sarcini de suprafață (6.2) și forțe concentrate (6.3), lucrul mecanic virtual al sarcinilor exterioare este

$$\delta W_E = \int_V \{\delta u\}^T \{p_v\} dV + \int_{S_\sigma} \{\delta u\}^T \{p_s\} dA + \sum_i \{\delta u_i\}^T \{F_i\}. \quad (7.4)$$

De exemplu, produsul scalar de sub prima integrală este

$$\{\delta u\}^T \{p_v\} = \delta u \cdot p_{vx} + \delta v \cdot p_{vy} + \delta w \cdot p_{vz}.$$

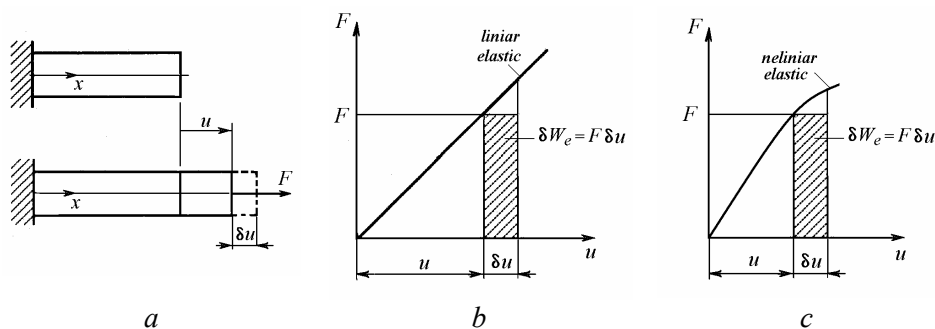


Fig. 7.1

De notat lipsa factorului $1/2$ care apare în expresia lucrului mecanic al forțelor elastice, deoarece forțele exterioare rămân constante în timpul acțiunii lor pe deplasările virtuale.

7.1.3 Lucrul mecanic virtual al forțelor interioare

Pentru un corp continuu tridimensional, lucrul mecanic virtual al tensiunilor interioare este

$$\delta W_I = \int_V \{\delta \varepsilon\}^T \{\sigma\} dV, \quad (7.5)$$

după cum se arată în fig. 7.2 pentru cazul uniaxial.

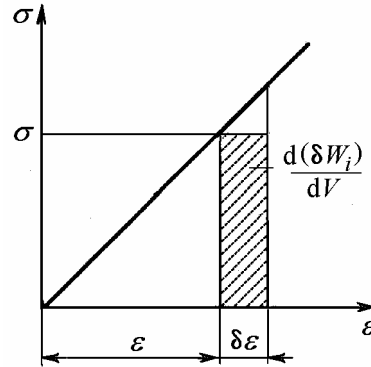


Fig. 7.2

Tensiunile rămân constante în timpul acțiunii pe deplasările specifice virtuale.

7.1.4 Principiul delasărilor virtuale

În cazul corpurilor elastice, principiul deplasărilor virtuale se enunță astfel:

Dacă un sistem este în echilibru, atunci pe o deplasare arbitrară din poziția de echilibru, lucrul mecanic virtual al forțelor exterioare este egal cu lucrul mecanic virtual al forțelor interioare

$$\delta W_E = \delta W_I. \quad (7.6)$$

De asemenea: *Un corp este în echilibru dacă lucrul mecanic virtual interior este egal cu lucrul mecanic virtual exterior pentru orice câmp de deplasări cinematic admisibil*

$$\int_V \{\delta \varepsilon\}^T \{\sigma\} dV - \int_V \{\delta u\}^T \{p_o\} dV - \int_{S_\sigma} \{\delta u\}^T \{p_s\} dA - \sum_i \{\delta u_i\}^T \{F_i\} = 0. \quad (7.6, a)$$

În (7.6) δW_E este lucrul mecanic al sarcinilor exterioare pe deplasările virtuale $\{\delta u\}$ care sunt independente de încărcare și cinematic admisibile.

Dacă tensiunile se exprimă în funcție de parametrii care definesc complet câmpul de deplasări – de exemplu deplasările nodale, atunci se pot obține ecuațiile de echilibru și se pot determina deplasările. Deplasările nodale nu permit realizarea configurației de echilibru total, PDV asigurând doar un echilibru aproximativ.

Lucrul mecanic virtual al reacțiunilor din reazeme este zero. Deoarece principiul deplasărilor virtuale este o condiție de echilibru, acesta este independent de comportarea materialului, adică dacă materialul este elastic sau neelastic. El se aplică doar încărcărilor cu forțe conservative, care nu își schimbă direcția în timpul

acțiunii pe deplasările virtuale. Lucrul mecanic exterior este independent de traiectoria forțelor.

Exemplul 7.1

La sistemul cu trei bare articulate din fig. 7.3, încărcat cu forța F , se cere să se calculeze forțele din bare și deplasarea punctului 4.

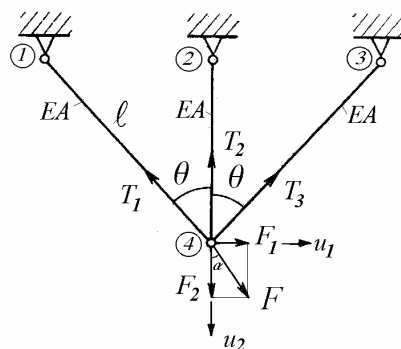


Fig. 7.3

Rezolvare. Se consideră trei stări diferite ale sistemului analizat:

1. Starea inițială, în care barele nu sunt încărcate cu forțe exterioare și nu sunt pretensionate (fig. 7.4, a).

2. Starea finală de echilibru static, în care forța exterioară F , de componente $F_1 = F \sin \alpha$ și $F_2 = F \cos \alpha$, produce o deplasare a articulației 4, de componente u_1 și u_2 (fig. 7.4, b).

Asupra articulației 4 acționează forțele exterioare F_1 , F_2 și forțele interioare T_1 , T_2 , T_3 (fig. 7.4, c). Asupra barelor acționează forțe egale și de sens contrar care produc alungirile Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 (fig. 7.4, d).

3. O stare imaginară, în care se dă articulației 4 o deplasare virtuală de componente δu_1 și δu_2 (fig. 7.4, e), care produce în bare alungirile virtuale $\delta \Delta_1$, $\delta \Delta_2$, $\delta \Delta_3$ (fig. 7.4, f), forțele aplicate rămânând constante.

Deplasările virtuale δu_1 și δu_2 și alungirile virtuale ale barelor $\delta \Delta_1$, $\delta \Delta_2$, $\delta \Delta_3$ satisfac relațiile de compatibilitate (2.19)

$$\begin{aligned}\delta\Delta_1 &= \delta u_1 \sin\theta + \delta u_2 \cos\theta, \\ \delta\Delta_2 &= \delta u_2, \\ \delta\Delta_3 &= -\delta u_1 \sin\theta + \delta u_2 \cos\theta.\end{aligned}\quad (7.7)$$

Pentru cele trei bare, relațiile forță-alungire (2.21) se pot scrie

$$\Delta_1 = \frac{T_1 \ell}{EA}, \quad \Delta_2 = \frac{T_2 \ell \cos\theta}{EA}, \quad \Delta_3 = \frac{T_3 \ell}{EA}. \quad (7.8)$$

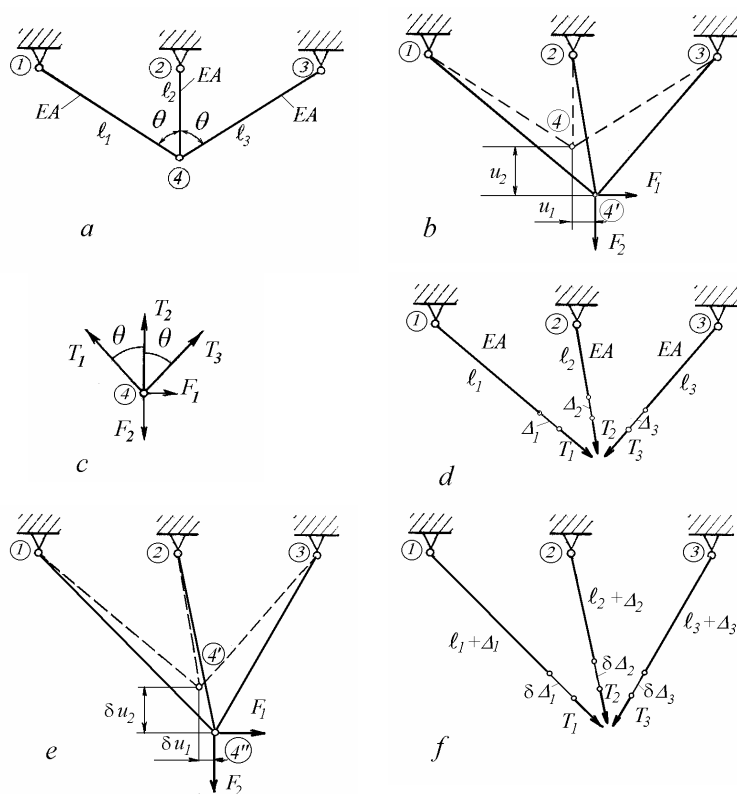


Fig. 7.4

Egalând lucrul mecanic virtual interior cu lucrul mecanic virtual exterior (7.6) utilizând produsele dintre forțele reale și deplasările virtuale rezultă

$$T_1 \delta\Delta_1 + T_2 \delta\Delta_2 + T_3 \delta\Delta_3 = F_1 \delta u_1 + F_2 \delta u_2. \quad (7.9)$$

Înlocuind (7.7) în (7.9) și grupând coeficienții lui δu_1 și δu_2 se obține

$$\delta u_1 (T_1 \sin \theta - T_3 \sin \theta - F_1) + \delta u_2 (T_1 \cos \theta + T_2 + T_3 \cos \theta - F_2) = 0. \quad (7.10)$$

Deoarece δu_1 și δu_2 sunt relativ independente, se poate anula oricare dintre ele. În ecuația (7.10) membrul drept trebuie să fie zero indiferent de valorile lui δu_1 și δu_2 . Pentru aceasta coeficienții lor (parantezele) trebuie să fie zero

$$\begin{aligned} T_1 \sin \theta - T_3 \sin \theta &= F_1, \\ T_1 \cos \theta + T_2 + T_3 \cos \theta &= F_2. \end{aligned} \quad (7.11)$$

Acestea sunt de fapt ecuațiile de echilibru. Se confirmă că principiul lucrului mecanic virtual este echivalent cu condițiile de echilibru static.

Înlocuind (7.8) în forma finită a relațiilor (7.7), apoi în (7.11), rezultă relațiile de mai jos din care se determină componentele deplasării punctului 4

$$\begin{aligned} \frac{2EA}{\ell} \sin^2 \theta \cdot u_1 &= F_1, \\ \frac{EA}{\ell} \left(2 \cos^2 \theta + \frac{1}{\cos \theta} \right) u_2 &= F_2. \end{aligned} \quad (7.12)$$

7.1.5 Proba că PDV este echivalent cu ecuațiile de echilibru

Se consideră o formă a ecuației (7.6, a) fără forțe concentrate

$$\int_V \{ \delta \varepsilon \}^T \{ \sigma \} dV = \int_V \{ \delta u \}^T \{ p_v \} dV + \int_{S_\sigma} \{ \delta u \}^T \{ p_s \} dA. \quad (7.6, b)$$

Se transformă $\{ \delta \varepsilon \}$ în $\{ \delta u \}$ utilizând integrarea prin părți

$$\begin{aligned} \int_V \sigma_x \delta \varepsilon_x dV &= \int_V \sigma_x \delta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) dx dy dz = \int_{S_\sigma} \sigma_x \frac{\partial}{\partial x} (\delta u) dx \ell dA = \\ &= \int_{S_\sigma} \sigma_x d(\delta u) \ell dA = \int_{S_\sigma} \sigma_x \delta u \ell dA - \int_V \delta u \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \frac{dx dy dz}{dV}, \\ \int_V \sigma_y \delta \varepsilon_y dV &= \int_{S_\sigma} \sigma_y \delta v m dA - \int_V \delta v \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dV, \\ \int_V \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} dV &= \int_{S_\sigma} \tau_{xy} (\delta v \cdot \ell + \delta u \cdot m) dA - \int_V \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \delta v + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \delta u \right) dV, \end{aligned}$$

unde ℓ și m sunt cosinusurile directoare ale normalei exterioare la suprafață.

Adunând termenii de mai sus se obține

$$\int_V (\delta \varepsilon_x \sigma_x + \delta \varepsilon_y \sigma_y + \delta \gamma_{xy} \tau_{xy}) dV = \int_{S_\sigma} [\delta u (\sigma_x \ell + \tau_{xy} m) + \delta v (\tau_{xy} \ell + \sigma_y m)] dA - \\ - \int_V \left[\delta u \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) + \delta v \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \right) \right] dV.$$

În formă matricială (teorema lui Gauss)

$$\int_V \{ \delta \varepsilon \}^T \{ \sigma \} dV = \int_{S_\sigma} \{ \delta u \}^T [n]^T \{ \sigma \} dA - \int_V \{ \delta u \}^T [\partial]^T \{ \sigma \} dV,$$

relație valabilă cu condiția ca $[\partial]^T \{ \sigma \}$ și $\{ \varepsilon \}$ să fie finite în V , deci ca tensiunile și câmpul de deplasări să fie continue. Aceasta se aplică doar în interiorul unui singur element și până la suprafața acestuia.

Componentele tensiunilor la interfețele elementelor este posibil să nu se echilibreze într-un punct, ci doar *in medie*. Majoritatea elementelor finite utilizate în prezent nu realizează tensiuni continue la traversarea interfețelor.

Înlocuind în (7.6, b) se obține

$$\int_V \{ \delta u \}^T ([\partial]^T \{ \sigma \} + \{ p_v \}) dV - \int_{S_\sigma} \{ \delta u \}^T ([n]^T \{ \sigma \} - \{ p_s \}) dA = 0.$$

Deoarece deplasările virtuale $\{ \delta u \}$ sunt arbitrare, coeficienții acestora trebuie să se anuleze.

Ecuțiile de echilibru se obțin anulând parantezele

$$[\partial]^T \{ \sigma \} + \{ p_v \} = \{ 0 \} \text{ în } V, \quad [n]^T \{ \sigma \} - \{ p_s \} = \{ 0 \} \text{ pe } S_\sigma.$$

Cu ajutorul PDV se obțin condițiile de echilibru atât în interiorul cât și la suprafața corpului. Dar atunci când se utilizează funcții aproximative pentru $\{ u \}$, condițiile de echilibru la suprafață nu interesează. O parte a suprafeței, adică S_σ , este rezemată și acolo sarcinile de suprafață $\{ p_s \}$ sunt reacțiunile necunoscute și forțele nespecificate. Reacțiunile necunoscute sunt eliminate alegând deplasări virtuale $\{ \delta u \}$ nule pe suprafața S_σ .

7.2 Principiul minimului energiei potențiale totale

Energia potențială totală Π a unui corp elastic este egală cu suma energiei de deformație U și a potențialului sarcinilor exterioare W_p

$$\Pi = U + W_p. \quad (7.13)$$

7.2.1 Energia de deformație

Fie energia de deformație (6.32)

$$U = \frac{1}{2} \int_V \{\varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon\} dV.$$

Pentru deformații specifice virtuale $\{\delta\varepsilon\}$, creșterea virtuală a energiei de deformație este

$$\delta U = \frac{1}{2} \int_V \{\delta\varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon\} dV + \frac{1}{2} \int_V \{\varepsilon\}^T [D] \{\delta\varepsilon\} dV.$$

Deoarece

$$\begin{aligned} \left(\{\delta\varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon\} \right)^T &= \{\varepsilon\}^T [D] \{\delta\varepsilon\}, \\ \delta U &= \int_V \{\delta\varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon\} dV = \int_V \{\delta\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV = \delta W_I. \end{aligned}$$

$$\delta U = \delta W_I. \quad (7.14)$$

La un corp elastic, variația virtuală a energiei de deformație este egală cu lucrul mecanic virtual al tensiunilor interne pe deformațiile specifice virtuale.

Pentru o bară sollicitată axial, înlocuind $\sigma = E \varepsilon$ și $\varepsilon = \frac{du}{dx}$, rezultă

$$\delta U = \int_V \delta\varepsilon \sigma dV = \int_{\ell} \delta\varepsilon E \varepsilon A dx = \int_{\ell} \frac{d\delta u}{dx} E A \frac{du}{dx} dx. \quad (7.15)$$

La o grindă sollicitată la încovoiere, înlocuind $\varepsilon = -y \frac{d^2v}{dx^2}$ (5.4), rezultă

$$\delta U = \int_l \frac{\partial^2 \delta v}{\partial x^2} E \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \left(\int_A y^2 dA \right) dx = \int_{\ell} \frac{d^2 \delta v}{dx^2} EI \frac{d^2 v}{dx^2} dx. \quad (7.16)$$

Expresiile de mai sus se pot obține direct din energiile de deformație

$$\text{pentru o bară} \quad U = \int_{\ell} \frac{EA}{2} \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx, \quad (7.17)$$

$$\text{pentru o grindă} \quad U = \int_{\ell} \frac{EI}{2} \left(\frac{d^2v}{dx^2} \right)^2 dx. \quad (7.18)$$

7.2.2 Energia potențială exterioară

Potențialul forțelor exterioare W_P este egal cu produsul forțelor exterioare cu deplasările corespunzătoare, luat cu semnul minus

$$W_P = -W_E. \quad (7.19)$$

Semnul minus apare deoarece forțele exterioare pierd din capacitatea lor de a efectua lucru mecanic când se deplasează pe direcția în care acționează.

De exemplu, dacă o forță gravitațională $F = mg$ are o deplasare verticală h în sens contrar direcției forței, energia potențială crește cu mgh .

O forță concentrată exterioară F_j are energia potențială $(-F_j u_j)$ în loc de $\left(-\frac{1}{2} F_j u_j\right)$, deoarece acest potențial provine din mărimea forței și capacitatea acesteia de a efectua lucru mecanic atunci când este deplasată, fiind independent de proprietățile liniare ale corpului asupra căruia acționează

Pentru un corp continuu tridimensional

$$W_P = - \int_V \{u\}^T \{p_v\} dV - \int_{S_\sigma} \{u\}^T \{p_s\} dA - \sum_i \{u_i\}^T \{F_i\}. \quad (7.20)$$

Pentru deplasări virtuale $\{\delta u\}$

$$\delta W_P = -\delta W_E. \quad (7.21)$$

7.2.3 Energia potențială totală

Energia potențială totală (7.13) poate fi scrisă

$$\Pi = \int_V \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV - \int_V \{u\}^T \{p_v\} dV - \int_{S_\sigma} \{u\}^T \{p_s\} dA - \sum_i \{u_i\}^T \{F_i\}. \quad (7.13, a)$$

Variația acesteia este

$$\delta II = \delta U + \delta W_P = \delta W_I - \delta W_E. \quad (7.22)$$

Pe baza egalității (7.6) rezultă că

$$\delta II = 0, \quad (7.22, a)$$

prin urmare, *la echilibru, energia potențială totală are o valoare staționară. Dacă $\delta^2 II > 0$, valoarea staționară este un minimum, deci echilibrul este stabil.*

Principiul minimumului energiei potențiale totale se poate enunța astfel:

Dacă un corp deformabil este în echilibru sub acțiunea sarcinilor exterioare și a reacțiunilor din reazeme, atunci energia potențială totală are o valoare minimă.

Reciproc, *dacă sub acțiunea sarcinilor exterioare și a reacțiunilor din reazeme energia potențială totală a unui corp deformabil are un minim, atunci corpul este într-o stare de echilibru stabil.*

Astfel, se poate considera că (7.22, a) este mai degrabă o condiție care stabilește sau definește echilibrul, decât un rezultat al echilibrului.

O formulare echivalentă este următoarea: *La sisteme conservative, din toate câmpurile de deplasări posibile cinematic admisibile, cel care satisface echilibrul corespunde unei valori minime a energiei potențiale totale.*

Reciproc, *orice câmp de deplasări cinematic admisibil care minimizează energia potențială totală reprezintă o configurație de echilibru stabil.*

Exemplul 7.2

La sistemul din figura 7.3, energia de deformație a unei bare este

$$U_i = \frac{1}{2} T_i \Delta_i = \frac{1}{2} \frac{EA_i}{l_i} \Delta_i^2,$$

iar energia potențială exterioară este

$$W_P = -\sum_i F_i u_i.$$

Exprimând alungirile în funcție de deplasări, pe baza relațiilor de compatibilitate, energia potențială totală poate fi scrisă sub forma

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{EA}{2\ell} (u_1 \sin\theta + u_2 \cos\theta)^2 + \frac{EA}{2\ell \cos\theta} u_2^2 + \\ & + \frac{EA}{2\ell} (-u_1 \sin\theta + u_2 \cos\theta)^2 - F_1 u_1 - F_2 u_2. \end{aligned}$$

Anulând derivatele lui Π în raport cu fiecare variabilă independentă

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_1} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial u_2} = 0,$$

se obțin ecuațiile de echilibru (7.11).

Exemplul 7.3

Să se aplice principiul minimului energiei potențiale totale la o grindă încărcată cu o sarcină distribuită și cu momentele încovoietoare și forțele tăietoare de la capete, ca în fig. 7.5. Să se arate că PMEPT este echivalent cu condițiile de echilibru în interiorul și la capetele grinzii.

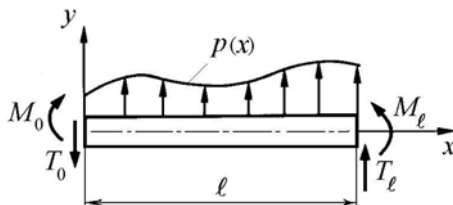


Fig. 7.5

Rezolvare. Pentru un segment de grindă încărcat ca în fig. 7.5, energia potențială totală este

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{\ell} EI (v'')^2 dx - \int_{\ell} p v dx + M_0 v'_0 - M_l v'_l + T_0 v_0 - T_l v_l.$$

La echilibru, energia potențială totală Π este staționară, $\delta \Pi = 0$, deci

$$\int_{\ell} EI v'' \delta(v'') dx - \int_{\ell} p \delta v dx + M_0 \delta v'_0 - M_l \delta v'_l + T_0 \delta v_0 - T_l \delta v_l = 0. \quad (a)$$

Integrând prin părți primul termen se obține

$$\begin{aligned} \int_{\ell} EI v'' \delta(v'') dx &= \int_{\ell} EI v'' \frac{d}{dx} \left(\delta \frac{dv}{dx} \right) dx = \int_{\ell} EI v'' d(\delta v') = \\ &= EI v'' \delta v' \Big|_0^{\ell} - \int_{\ell} \frac{d}{dx} (EI v'') dx \delta v' = EI v'' \delta v' \Big|_0^{\ell} - \int_{\ell} (EI v'')' \delta v' dx. \end{aligned}$$

Integrând prin părți ultimul termen de mai sus, rezultă

$$\begin{aligned} \int_{\ell} (EI v'')' \delta v' dx &= \int_{\ell} (EI v'')' \frac{d}{dx} (\delta v) dx = \int_{\ell} (EI v'')' d(\delta v) = \\ &= (EI v'')' \delta v \Big|_0^{\ell} - \int_{\ell} \frac{d}{dx} (EI v'')' dx \delta v = (EI v'')' \delta v \Big|_0^{\ell} - \int_{\ell} (EI v'')'' \delta v dx. \end{aligned}$$

Ecuția (a) devine

$$EI v'' \delta v' \Big|_0^{\ell} - (EI v'')' \delta v \Big|_0^{\ell} + \int_{\ell} (EI v'')'' \delta v dx - \int_{\ell} p \delta v dx - M \delta v' \Big|_0^{\ell} - T \delta v \Big|_0^{\ell} = 0$$

sau

$$\int_{\ell} \left((EI v'')'' - p \right) \delta v dx + (EI v'' - M) \delta v' \Big|_0^{\ell} - \left((EI v'')' + T \right) \delta v \Big|_0^{\ell} = 0.$$

Anulând coeficientul lui δv de sub integrală se obține ecuația de echilibru

$$(EI v'')'' = p(x).$$

Deoarece δv este arbitrar, din ceilalți termeni se obțin condițiile de echilibru la capetele grinzii

$$(EI v'')_0 = M_0, \text{ sau } \delta v'_0 = 0, \quad (EI v'')'_0 = -T_0, \text{ sau } \delta v_0 = 0,$$

$$(EI v'')_{\ell} = M_{\ell}, \text{ sau } \delta v'_{\ell} = 0, \quad \text{și } (EI v'')'_{\ell} = -T_{\ell}, \text{ sau } \delta v_{\ell} = 0,$$

care reprezintă condițiile la limită.

7.3 Metoda Rayleigh-Ritz

Metoda Rayleigh-Ritz implică alegerea unei funcții care să descrie câmpul de deplasări. La o grindă, săgeata $v(x)$ este aproximată printr-o serie finită

$$v(x) \cong \sum_{j=1}^n a_j \varphi_j(x) \quad (7.23)$$

în care a_j sunt constante necunoscute numite *coordonate generalizate*, iar $\varphi_j(x)$ sunt funcții predeterminate de x , numite *funcții admisibile*, care satisfac condițiile la limită cinematice (geometrice) și sunt continue în intervalul de definiție.

Înlocuind deplasările (7.23) în expresia energiei potențiale totale Π , aceasta devine o funcție de parametrii a_j , ale căror valori se determină din condițiile de staționaritate

$$\delta \Pi = \sum_j \frac{\partial \Pi}{\partial a_j} \delta a_j = 0.$$

Deoarece variațiile δa_j sunt arbitrare, rezultă

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_j} = 0, \quad (j=1, \dots, n), \quad (7.24)$$

care este un sistem de ecuații algebrice liniare în constantele a_j .

Soluțiile se înlocuiesc în expresia (7.23) care reprezintă o configurație aproximativă, cu atât mai precisă cu cât se aleg mai mulți termeni în seria respectivă.

Condițiile de convergență ale metodei Rayleigh-Ritz sunt următoarele:

a) Funcțiile de aproximare trebuie să aibă o continuitate cu un ordin mai mică decât derivata de ordinul cel mai înalt de sub integrală.

b) Funcțiile trebuie să satisfacă *individual* condițiile la limită geometrice, adică să fie *funcții admisibile*.

c) Secvența de funcții trebuie să fie *completă*.

Dacă funcțiile nu sunt alese din spațiul domeniului de definiție al operatorului din ecuația ce trebuie rezolvată (proprietatea de completitudine) soluția obținută poate fi zero sau greșită.

Exemplul 7.4

La grinda din figura 7.6 se cere săgeata în punctul 2. Se consideră: $E = 210 \text{ MPa}$, $I = 1600 \text{ mm}^4$, $\ell = 3 \text{ m}$, $F = 100 \text{ N}$ și $q = 200 \text{ N/m}$.

Rezolvare. Energia potențială totală este

$$\Pi = \frac{1}{2} EI \int_0^{\ell} \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 dx - \int_{2\ell/3}^{\ell} q v(x) dx - F v \left(\frac{\ell}{2} \right). \quad (7.25)$$

Condițiile la limită geometrice sunt

$$v(0) = 0, \quad v'(0) = 0, \quad v \left(\frac{2\ell}{3} \right) = 0, \quad v(\ell) = 0. \quad (7.26)$$

În continuare, pentru simplificare, săgețile sunt approximate printr-o serie de numai doi termeni

$$v(x) = a_1 \varphi_1(x) + a_2 \varphi_2(x), \quad (7.27)$$

în care funcțiile

$$\varphi_1(x) = \frac{x^2(3x - 2\ell)(x - \ell)}{\ell^4}, \quad \varphi_2(x) = \frac{x^3(3x - 2\ell)(x - \ell)}{\ell^5}, \quad (7.28)$$

satisfac toate condițiile la limită geometrice (7.26).

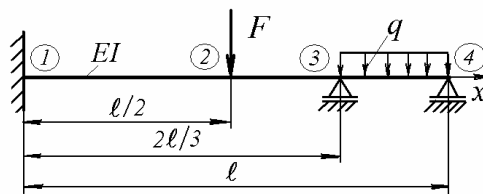


Fig. 7.6

Înlocuind (7.27) în (7.25) se obține funcționala

$$\begin{aligned} \Pi = \frac{1}{2} EI \int_0^{\ell} (a_1 \varphi_1'' + a_2 \varphi_2'')^2 dx - \int_{2\ell/3}^{\ell} q (a_1 \varphi_1 + a_2 \varphi_2) dx - \\ - F [a_1 \varphi_1(\ell/2) + a_2 \varphi_2(\ell/2)]. \end{aligned}$$

Impunând ca Π să fie staționară în raport cu a_1 și a_2 , se obțin două ecuații în coordonatele generalizate

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_1} = EI \int_0^{\ell} (a_1 \varphi_1'' + a_2 \varphi_2'') \varphi_1'' dx - \int_{2\ell/3}^{\ell} q \varphi_1 dx - F \varphi_1(\ell/2) = 0,$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_2} = EI \int_0^{\ell} (a_1 \varphi_1'' + a_2 \varphi_2'') \varphi_2'' dx - \int_{2\ell/3}^{\ell} q \varphi_2 dx - F \varphi_2(\ell/2) = 0.$$

Întrucât Π este de gradul doi în φ și φ'' , ecuațiile sunt liniare în a_j .

Înlocuind funcțiile (7.28), și considerând $F = q \ell/6$, se obține

$$\begin{aligned} \frac{56}{5} \frac{EI}{\ell^3} a_1 + 10 \frac{EI}{\ell^3} a_2 &= -\frac{11}{4320} q \ell, \\ 10 \frac{EI}{\ell^3} a_1 + \frac{72}{7} \frac{EI}{\ell^3} a_2 &= -\frac{269}{46656} q \ell. \end{aligned}$$

De exemplu, coeficientul lui a_1 în prima ecuație este

$$EI \int_0^{\ell} (\varphi_1'')^2 dx = EI \int_0^{\ell} \frac{1}{\ell^8} (36x^2 - 30\ell x + 4\ell^2)^2 dx = \frac{56}{5} \frac{EI}{\ell^3}.$$

Soluțiile au forma

$$a_1 = 0,00207 \frac{q \ell^4}{EI}, \quad a_2 = -0,00257 \frac{q \ell^4}{EI}. \quad (7.29)$$

Săgeata în 2 este

$$\begin{aligned} v(\ell/2) &= a_1 \varphi_1(\ell/2) + a_2 \varphi_2(\ell/2) = \\ &= \frac{1}{16} a_1 + \frac{1}{32} a_2 = 4,9 \cdot 10^{-5} \frac{q \ell^4}{EI_y} = 2,48 \text{ mm}. \end{aligned}$$

Exemplul 7.5

Se consideră un arc liniar cu rigiditatea k (fig. 7.7, a) sollicitat de o forță F . Să se comenteze aproximările metodei Rayleigh-Ritz.

Răspuns. Energia potențială totală (fig. 7.7, b) este

$$\Pi = \frac{1}{2} k u^2 - F u. \quad (7.30)$$

Dacă se imprimă capătului arcului o deplasare virtuală δu , variația energiei potențiale totale este

$$\delta \Pi = k u \delta u - F \delta u = (k u - F) \delta u.$$

Ecuția de echilibru se obține din condiția ca $\delta\Pi$ să fie zero (Π să fie staționară) pentru o deplasare δu arbitrară.

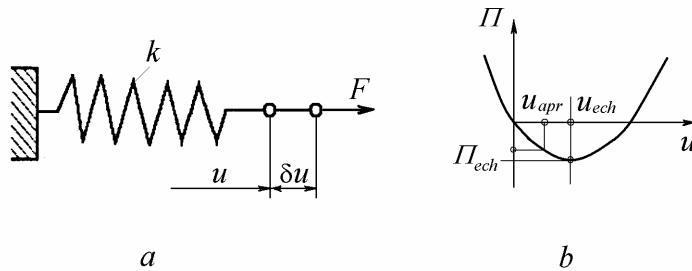


Fig. 7.7

Pentru $\delta\Pi = 0$ se obține

$$k u_{ech} - F = 0. \quad (7.31)$$

După cum se observă din fig. 7.7, b, soluția exactă corespunde unei valori minime absolute a lui Π .

Energia potențială totală în configurația de echilibru este

$$\Pi_{ech} = \frac{1}{2} F u_{ech} - F u_{ech} = -\frac{1}{2} F u_{ech} = -\frac{1}{2} \frac{F^2}{k}. \quad (7.32)$$

Rigiditatea are expresia

$$k = -\frac{1}{2} \frac{F^2}{\Pi_{ech}} = \frac{1}{2} \frac{F^2}{|\Pi_{ech}|}. \quad (7.33)$$

Energia de deformație la echilibru este

$$U_{ech} = \frac{1}{2} k u_{ech}^2 = \frac{1}{2} \frac{F^2}{k} = -\Pi_{ech}. \quad (7.34)$$

Dacă F este dată și deplasarea u este aproximată prin o soluție Rayleigh-Ritz $u_{aprox} \neq u_{ech}$, atunci relațiile (7.32) – (7.34) și fig. 7.7, b arată că:

a) Deoarece Π_{ech} este un minimum, pentru o deplasare aproximativă care satisface condițiile la limită cinematice, energia potențială este mai mare decât valoarea adevărată

$$\Pi_{aprox} > \Pi_{ech}.$$

În valoare absolută

$$|\Pi_{aprox}| < |\Pi_{ech}|,$$

deci energia potențială totală aproximativă este estimată în minus.

b) Rigiditatea aproximativă este estimată în plus

$$k \uparrow = \frac{1}{2} \frac{F^2}{|II_{eq}| \downarrow}. \quad (7.35)$$

c) Deplasarea aproximativă este estimată în minus

$$u \downarrow = \frac{F}{k \uparrow}. \quad (7.36)$$

Un câmp de deplasări compatibil aproximativ corespunde unei structuri care este mai rigidă decât structura reală și deci va da o limită inferioară pentru deplasări.

7.4 M.E.F. – o versiune localizată a metodei Rayleigh-Ritz

În loc să se utilizeze funcții admisibile care satisfac condițiile la limită pentru întregul domeniu, ceea ce este adesea dificil, în Metoda Elementelor Finite (M.E.F.) funcțiile admisibile sunt definite pe subdomenii de dimensiuni reduse.

7.4.1 M.E.F. în Mecanica structurilor

a) *Problema.* Se dă o structură cu geometrie complexă (inclusiv condițiile la limită) și sarcinile exterioare $\{p_v\}$, $\{p_s\}$, $\{F_i\}$, și se cere câmpul de deplasări $\{u\}$ în volumul V și pe suprafața S_σ (fig. 6.1). Se cer apoi tensiunile, forțele interioare, reacțiunile, etc.

b) *Soluția.* Se utilizează PDV sau PMEPT ca o metodă aproximativă pentru rezolvarea problemei cu valori la limită. Se definesc funcții admisibile definite pe elemente finite de mici dimensiuni, cu geometrie simplă și proprietăți structurale bine determinate. Cu ajutorul acestor funcții, definite pe intervale și cu valori (uneori și derivate) egale în anumite puncte (noduri) la granița dintre elemente, funcția necunoscută este aproximată pe întregul domeniu de definiție (continuitate la nivel global).

c) *Procedura.* Forma geometrică și câmpul interior de deplasări sunt descrise prin șiruri de cantități discrete (coordonate nodale și deplasări nodale) distribuite în toată structura. Pentru aceasta se utilizează notația matricială.

d) *Mijloacele.* Memorarea și prelucrarea acestor șiruri de numere se face cu ajutorul calculatoarelor numerice, care permit prezentarea datelor de ieșire sub formă de tabel și în format grafic static sau animat.

7.4.2 Discretizarea

Structura este împărțită în elemente finite (fig. 7.8) care definesc *rețeaua* de discretizare. Elementele sunt definite prin coordonatele nodale și parametrii fizici.

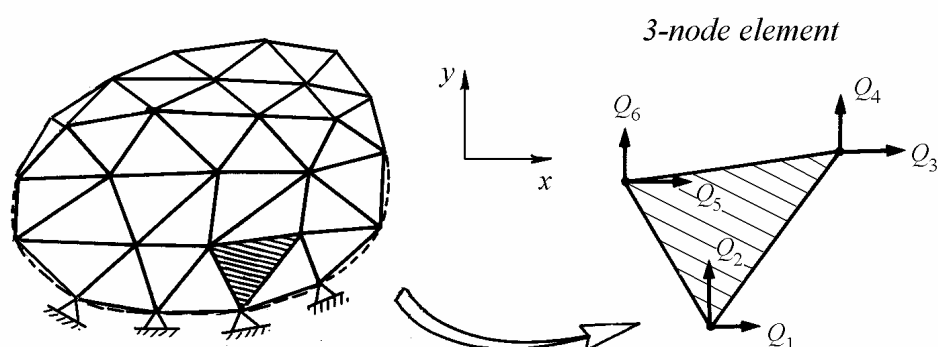


Fig. 7.8

7.4.3 Principul deplasărilor virtuale

Pentru întreaga structură, ecuația (7.6, a) poate fi scrisă (considerând numai sarcini de suprafață)

$$\delta\Pi = \int_V \{\delta\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV - \int_{S_\sigma} \{\delta u\}^T \{p_s\} dA = 0. \quad (7.37)$$

Prin însumarea lucrurilor mecanice virtuale ale tuturor elementelor, PDV se scrie sub forma

$$\delta\Pi = \sum_e \delta\Pi^e = \sum_e \left(\int_{V_e} \{\delta\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV - \int_{S_{\sigma_e}} \{\delta u\}^T \{p_s\} dA \right) = 0. \quad (7.38)$$

În continuare, se consideră numai $\delta\Pi^e$. Se urmărește calculul matricii de rigiditate și a vectorului forțelor pentru un element finit.

7.4.4 Funcțiile de aproximare pentru un element

În metoda Rayleigh-Ritz, funcția de aproximare se exprimă printr-o serie finită

$$u(x) \cong \sum_{j=1}^n a_j \varphi_j(x) = [\varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \cdots \quad \varphi_n] \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{Bmatrix} = [\varphi] \{a\} \quad (7.39)$$

în care constantele necunoscute a_j nu au semnificație fizică evidentă directă.

Ideea de bază a M.E.F. este de a alege aceste constante – deplasările necunoscute la noduri $\{a\} = \{Q^e\}$ și de a prescrie funcții admisibile notate $[\varphi] = [N]$ astfel încât

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [N_u] & 0 & 0 \\ 0 & [N_v] & 0 \\ 0 & 0 & [N_w] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{Q_u^e\} \\ \{Q_v^e\} \\ \{Q_w^e\} \end{Bmatrix}$$

sau

$$\{u\} = [N] \{Q^e\}, \quad (7.40)$$

unde $[N]$ este matricea *funcțiilor de formă* (de interpolare).

Procedeeul este valabil deoarece elementele finite sunt suficient de mici astfel încât forma câmpului de deplasări să poată fi aproximată suficient de precis, rămânând să fie determinată doar mărimea acestuia, definită de $\{Q^e\}$.

Alegerea judicioasă a funcțiilor de formă asigură continuitatea câmpului de deplasări la nivel global. Un element finit descris prin funcții de formă admisibile (integrabile în interior și cu valori egale ale coordonatelor generalizate la interfețele elementelor) este denumit *element compatibil* sau *element conform*.

7.4.5 Compatibilitatea între deformații specifice și deplasări

Din relațiile de compatibilitate (6.18) se obține

$$\{\varepsilon\} = [\partial] \{u\} = [\partial] [N] \{Q^e\} = [B] \{Q^e\}, \quad (7.41)$$

unde $[B]$ este matricea derivatelor *funcțiilor de formă*.

Variația virtuală a deformațiilor specifice este

$$\{\delta\varepsilon\} = [B] \{\delta Q^e\}.$$

7.4.6 Matricea de rigiditate și vectorul forțelor unui element

Utilizând ecuațiile constitutive $\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}$, lucrul mecanic virtual pentru un element se poate scrie

$$\delta \Pi^e = \int_{V_e} \{\delta Q^e\}^T [B]^T [D] [B] \{Q^e\} dV - \int_{A_e} \{\delta Q^e\}^T [N]^T \{p_s\} dA = 0$$

sau

$$\delta \Pi^e = \{\delta Q^e\}^T \left(\int_{V_e} [B]^T [D] [B] dV \{Q^e\} - \int_{A_e} [N]^T \{p_s\} dA \right) = 0.$$

Deoarece $\{\delta Q^e\}$ sunt arbitrare și nenule, prin anularea expresiei din paranteză se obțin ecuațiile de echilibru

$$[K^e] \{Q^e\} = \{F^e\}, \quad (7.42)$$

în care matricea de rigiditate a elementului este

$$[K^e] = \int_{V_e} [B]^T [D] [B] dV \quad (7.43)$$

iar vectorul forțelor nodale coerente este

$$\{F^e\} = \int_{A_e} [N]^T \{p_s\} dA. \quad (7.44)$$

7.4.7 Asambarea matricii de rigiditate globale și a vectorului global al forțelor

În pasul următor, toate elementele sunt asamblate împreună astfel încât deplasările să fie continue la granița cu alte elemente și condițiile la limită să fie satisfăcute.

Conectivitatea cinematică se exprimă prin relațiile între deplasările elementelor și deplasările globale

$$\{Q^e\} = [\tilde{T}^e] \{\bar{Q}\}, \quad (7.45)$$

în care $\{Q^e\}$ este vectorul deplasărilor nodale ale elementului, $\{\bar{Q}\}$ este vectorul global al deplasărilor nodale ale structurii și $[\tilde{T}^e]$ este o matrice de conectivitate (localizare), având intrări egale cu 1 la deplasările nodale ale elementului și intrări egale cu zero în rest.

Variațiile deplasărilor nodale ale elementului sunt

$$\{\delta Q^e\} = [\tilde{T}^e] \{\delta \bar{Q}\}. \quad (7.46)$$

Ecuția PDV pentru întreaga structură are forma

$$\sum_e \{\delta Q^e\}^T [K^e] \{Q^e\} = \sum_e \{\delta Q^e\}^T \{F^e\},$$

sau, utilizând (7.45) și (7.46),

$$\{\delta \bar{Q}\}^T \sum_e [\tilde{T}^e]^T [K^e] [\tilde{T}^e] \{\bar{Q}\} = \{\delta \bar{Q}\}^T \sum_e [\tilde{T}^e]^T \{Q^e\}.$$

Deoarece $\{\delta \bar{Q}\}$ sunt arbitrare și diferite de zero, ecuațiile de echilibru globale nereduse sunt

$$[\bar{K}] \{\bar{Q}\} = \{\bar{F}\}, \quad (7.47)$$

în care matricea de rigiditate globală este

$$[\bar{K}] = \sum_e [\tilde{T}^e]^T [K^e] [\tilde{T}^e] \quad (7.48)$$

și vectorul global al forțelor nodale este

$$\{\bar{F}\} = \sum_e [\tilde{T}^e]^T \{F^e\}. \quad (7.49)$$

Aplicând condițiile la limită, se obțin ecuațiile de echilibru condensate

$$[K] \{Q\} = \{F\}. \quad (7.50)$$

Procedura de mai sus nu este folosită în practică. Ea a fost prezentată doar pentru a ilustra algebric cum se poate asambla o matrice de rigiditate globală. Asamblarea se face direct, amplasând elementele nenule din matricile de rigiditate ale elementelor în pozițiile corespunzătoare din matricea de rigiditate globală, ținând cont de conectivitatea fiecărui element.

7.4.8 Rezolvarea ecuațiilor de echilibru și calculul tensiunilor

Deplasările nodale se determină rezolvând sistemul de ecuații liniare (7.50).

În faza retrocalculului, tensiunile în elemente se calculează pe baza deplasărilor nodale, utilizând matricea $[B]$ și matricile de conectivitate $[\tilde{T}^e]$:

$$\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\} = [D] [B] \{Q^e\} = [D] [B] [\tilde{T}^e] \{\bar{Q}\},$$

unde matricea $[D]$ este dată de relațiile (6.24) sau (6.25).

8.

ELEMENTE BIDIMENSIONALE

Elementele structurilor tehnice solicitate la stări plane de tensiuni sau deformații pot fi modelate ca plăci plane încărcate în planul lor. Acestea preiau sarcinile prin așa-numita “acțiune de membrană”, nefiind solicitate la încovoiere. Plăcile au grosime constantă, iar deplasările, deformațiile specifice și tensiunile din planul acestora sunt constante pe grosimea plăcii. În continuare se analizează numai plăci omogene transversal, plăcile sandwich și cele compozite fiind studiate în alte cursuri. În acest capitol se prezintă matricile de rigiditate și vectorii coerenți ai forțelor pentru elemente finite triunghiulare și dreptunghiulare solicitate coplanar, care permit soluții în formă închisă, fără a se apela la integrarea numerică. Primul element finit aproximativ, triunghiul cu trei noduri și câmp de deformații specifice constante, a fost dezvoltat în 1956 pentru modelarea panourilor aripilor delta ale avioanelor.

8.1 Triunghiul cu deformații specifice constante

Înainte de apariția elementelor izoparametrice cu forme oarecare, prezentate în capitolul următor, triunghiul cu deformații specifice constante denumit pe scurt CST (*constant strain triangle*) a fost unul dintre elementele finite cele mai utilizate, fiind încă inclus în prezent în programe cu elemente finite. Triunghiul are o formă mai ușor adaptabilă decât dreptunghiul și permite utilizatorului să modeleze structuri cu forme geometrice complicate. Astfel, în regiunile cu variații mari ale tensiunilor poate fi utilizată o rețea mai densă, formată din mai multe triunghiuri mici, în timp ce în regiunile cu variații mici ale tensiunilor se poate utiliza un număr mai mic de triunghiuri relativ mari.

8.1.1 Discretizarea structurii

Placa este împărțită în mai multe triunghiuri cu laturi drepte (fig. 8.1, *a*), interconectate la noduri, astfel încât colțurile elementelor vecine au deplasări comune. Elementele acoperă întregul domeniu al plăcii cu excepția unor regiuni

mici de lângă margini. Regiunile neacoperite de rețeaua de discretizare apar lângă marginile curbe și pot fi reduse alegând elemente finite mai mici.

Cele trei noduri ale elementului triunghiular detașat din fig. 8.1, *b* sunt numerotate local 1, 2 și 3. Coordonatele nodurilor se notează (x_1, y_1) , (x_2, y_2) și (x_3, y_3) . Numerotarea se face în sens antiorar pentru a evita calculul unor arii negative.

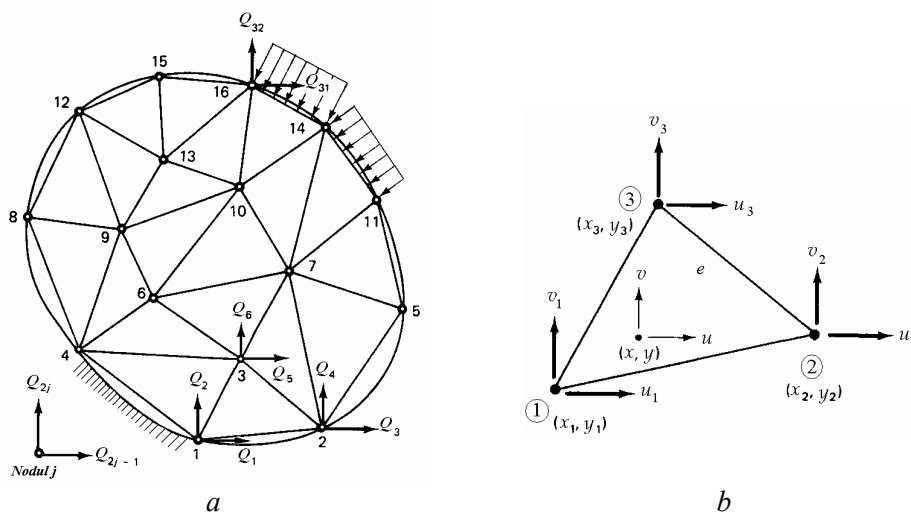


Fig. 8.1

Fiecare nod are două grade de libertate, deplasările pe direcțiile x și y . Componentele deplasărilor unui nod local j se notează u_j pe direcția x și v_j pe direcția y . Vectorul deplasărilor nodale ale elementului se notează

$$\{q^e\} = [u_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2 \ u_3 \ v_3]^T. \quad (8.1)$$

8.1.2 Aproximarea polinomială a câmpului de deplasări

Deplasările u și v ale unui punct din interiorul triunghiului se exprimă în funcție de deplasările nodale. Deoarece pentru două deplasări există șase condiții la limită, funcțiile de aproximare a câmpului de deplasări sunt liniare

$$\begin{aligned} u(x, y) &= a_1 + a_2 x + a_3 y, \\ v(x, y) &= a_4 + a_5 x + a_6 y, \end{aligned} \quad (8.2)$$

cu șase parametri arbitrari.

Deformațiile specifice (6.16) sunt

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = a_2 = \text{const.}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = a_6 = \text{const.},$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = a_3 + a_5 = \text{const.},$$

de unde denumirea “triunghi cu deformații specifice constante”.

8.1.3 Aproximarea nodală a câmpului de deplasări

În *aproximarea polinomială* (8.2) constantele a_i nu au semnificație fizică directă. Se preferă o *aproximare nodală*, în care constantele sunt deplasările nodale și câmpul de deplasări se obține prin interpolare pe baza valorilor deplasărilor vârfurilor triunghiului.

Deoarece funcțiile de aproximare a deplasărilor u și v au aceeași formă, se va analiza doar prima dintre ele. Aceasta se poate scrie

$$u = [1 \quad x \quad y] \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = [1 \quad x \quad y] \{a\}. \quad (8.3)$$

Evaluând expresia lui u la cele trei noduri, se obțin deplasările nodale în funcție de coeficienții polinomiali

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix}, \quad (8.4)$$

sau

$$\{u^e\} = [A] \{a\}, \quad (8.4, a)$$

unde

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}. \quad (8.5)$$

Prin inversare rezultă

$$\{a\} = [A]^{-1} \{u^e\}. \quad (8.6)$$

unde

$$[A]^{-1} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{bmatrix}. \quad (8.7)$$

în care

$$\alpha_i = x_j y_k - x_k y_j, \quad \beta_i = y_j - y_k, \quad \gamma_i = x_k - x_j \quad (8.8)$$

iar indicii i, j, k se determină prin permutări circulare.

Dublul ariei triunghiului este egal cu valoarea determinantului lui $[A]$

$$2A = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = (x_2 y_3 - x_3 y_2) + (x_3 y_1 - x_1 y_3) + (x_1 y_2 - x_2 y_1). \quad (8.9)$$

Determinantul este pozitiv dacă nodurile 1, 2, 3 sunt numerotate în sens antiorar.

Înlocuind (8.6) în (8.3) se obține

$$u = [N] \{ u^e \} \quad (8.10)$$

unde vectorul linie al funcțiilor de formă este

$$[N] = [N_1 \quad N_2 \quad N_3] = [1 \quad x \quad y] [A]^{-1}. \quad (8.11)$$

Prin transpoziție

$$[N]^T = [A]^{-T} [1 \quad x \quad y]^T, \quad (8.12)$$

$$\begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix}$$

unde

$$N_i = \frac{1}{2A} (\alpha_i + \beta_i x + \gamma_i y). \quad (i = 1, 2, 3) \quad (8.12, a)$$

Similar

$$v = [N] \{ v^e \}. \quad (8.13)$$

Funcțiile de formă (8.12, a) mai pot fi scrise

$$\begin{aligned}
 N_1(x, y) &= \frac{1}{2A} [x_2 y_3 - x_3 y_2 + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y], \\
 N_2(x, y) &= \frac{1}{2A} [x_3 y_1 - x_1 y_3 + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y], \\
 N_3(x, y) &= \frac{1}{2A} [x_1 y_2 - x_2 y_1 + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y].
 \end{aligned}
 \tag{8.12, b}$$

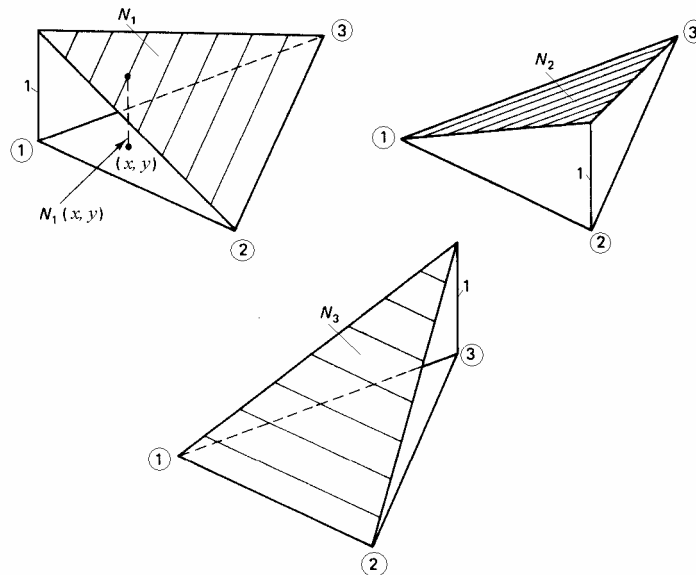


Fig. 8.2

Funcțiile de formă N_i variază liniar, au o valoare egală cu unitatea la nodul i și valori nule în celelalte două noduri (fig. 8.2):

$$N_i(x_i, y_i) = \delta_{ij}, \quad (i, j = 1, 2, 3) \tag{8.14}$$

și în același timp suma lor are o valoare egală cu unitatea

$$\sum_{i=1}^3 N_i = 1. \tag{8.15}$$

Combinând (8.10) și (8.14) rezultă vectorul deplasărilor

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \quad (8.16)$$

sau condensat

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = [N] \{q^e\}. \quad (8.16, a)$$

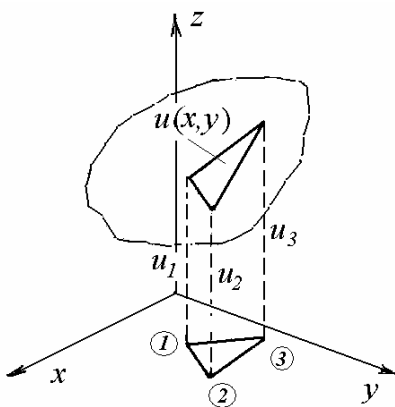


Fig. 8.3

Reprezentată în 3D, deplasarea $u(x,y) = u_1 N_1(x,y) + u_2 N_2(x,y) + u_3 N_3(x,y)$ determină o suprafață plană care trece prin u_1 , u_2 și u_3 (fig. 8.3).

8.1.4 Matricea $[B]$

Deformațiile specifice se pot exprima în funcție de deplasări sub forma

$$\{\varepsilon^e\} = [\partial] \{u\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} [N] \{q^e\} = [B] \{q^e\}.$$

Matricea derivatelor funcțiilor de formă este

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \end{bmatrix},$$

$$[B] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \beta_1 & 0 & \beta_2 & 0 & \beta_3 & 0 \\ 0 & \gamma_1 & 0 & \gamma_2 & 0 & \gamma_3 \\ \gamma_1 & \beta_1 & \gamma_2 & \beta_2 & \gamma_3 & \beta_3 \end{bmatrix},$$

$$[B] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_2 - y_3 & 0 & y_3 - y_1 & 0 & y_1 - y_2 & 0 \\ 0 & x_3 - x_2 & 0 & x_1 - x_3 & 0 & x_2 - x_1 \\ x_3 - x_2 & y_2 - y_3 & x_1 - x_3 & y_3 - y_1 & x_2 - x_1 & y_1 - y_2 \end{bmatrix}. \quad (8.17)$$

Matricea $[B]$ este constantă pentru un anumit element CST. Uneori aceasta se scrie simplificat sub forma

$$[B] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_{23} & 0 & y_{31} & 0 & y_{12} & 0 \\ 0 & x_{32} & 0 & x_{13} & 0 & x_{21} \\ x_{32} & y_{23} & x_{13} & y_{31} & x_{21} & y_{12} \end{bmatrix} \quad (8.17, a)$$

unde notația este evidentă.

8.1.5 Matricea de rigiditate a elementului și vectorul forțelor

Matricea de rigiditate a unui element (7.43) are expresia

$$[k^e] = \int_{V_e} [B]^T [D] [B] dV = [B]^T [D] [B] t^e A, \quad (8.18)$$

unde t^e este grosimea elementului, A este aria suprafeței elementului și $[D]$ este matricea de rigiditate a materialului, dată de (6.24) pentru stări plane de tensiuni și de (6.25) pentru stări plane de deformații specifice.

Forțele nodale coerente datorite unor sarcini coplanare distribuite pe o porțiune a conturului se calculează la fel ca pentru elementul liniar cu două noduri. În lungul laturii 1-2, funcția de formă N_3 este zero în timp ce N_1 și N_2 sunt la fel ca funcțiile de formă unidimensionale, satisfăcând relația $N_1 + N_2 = 1$. Pentru o

sarcină (pe unitatea de suprafață) distribuită liniar, variind de la p_1 în nodul 1 la p_2 în nodul 2 (fig. 8.4), forțele nodale sunt

$$f_1^e = \frac{\ell t^e}{6} (2p_1 + p_2), \quad f_2^e = \frac{\ell t^e}{6} (p_1 + 2p_2) \quad (8.19)$$

unde t^e este grosimea elementului. Datorită liniarității acestea coincid cu echivalentele statice.

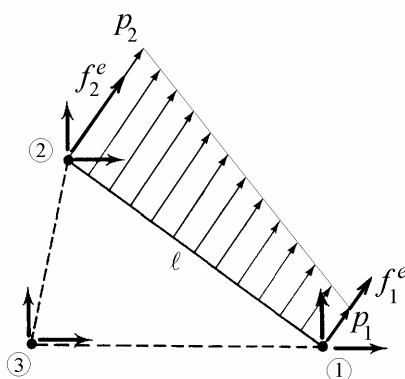


Fig. 8.4

Forțele nodale asociate cu greutatea unui element sunt egal distribuite la noduri.

8.1.6 Considerații generale

O rețea ca în fig. 8.5, *a* produce un model anizotrop (sensibil direcțional), ceea ce poate fi corectat utilizând modelul steagului englezesc din fig. 8.5, *b*, care însă produce o matrice de rigiditate cu lățime de bandă mai mare. Teste de simulare numerică utilizând elemente triunghiulare au arătat că elementele CST, chiar într-o rețea fină, sunt mult inferioare elementelor de ordin superior într-o rețea mai largă.

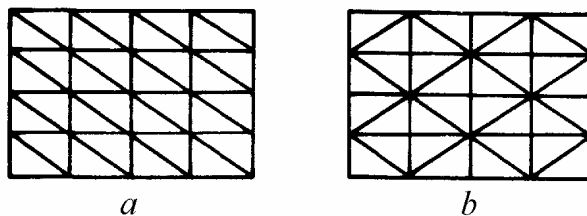


Fig. 8.5

Un dezavantaj al metodei deplasărilor în formularea cu elemente finite este faptul că echilibrul este satisfăcut doar în medie sau la nivel de element. În lungul unei laturi comune, tensiunile sunt diferite în elementele adiacente, în timp ce în realitate ele trebuie să fie continue. Majoritatea programelor conțin subrutine pentru calculul unor tensiuni medii. În cea mai simplă formă de mediere, se unesc centrele de greutate a două triunghiuri alăturate și se atribuie valoarea tensiunii medii punctului de intersecție al acestei drepte cu latura comună

Un exemplu simplu de mediere a tensiunilor este prezentat în fig. 8.6 pentru o placă pătrată cu o gaură în mijloc. Ținând cont de simetrie, se studiază doar un sfert de placă. Se compară diagrama distribuției teoretice (analitice) a tensiunilor în lungul liniei marcate, cu distribuția în trepte bazată pe valorile medii calculate utilizând elemente finite CST.

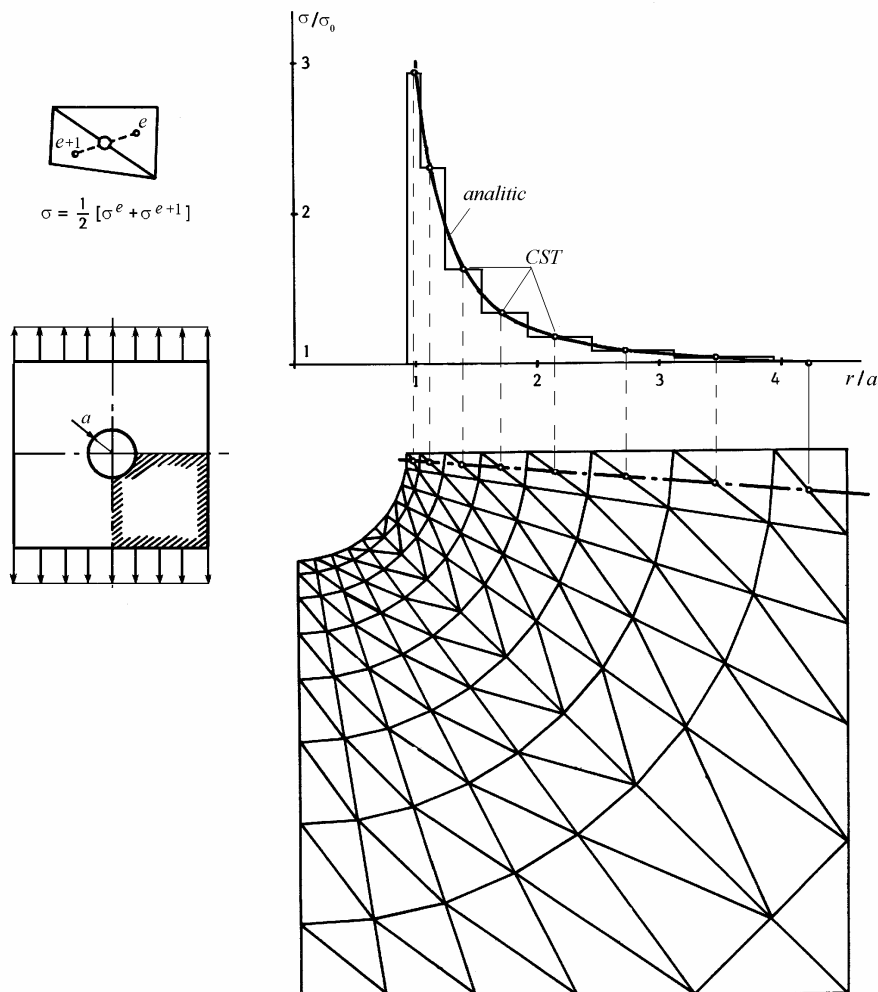


Fig. 8.6

Metoda va fi utilizată în Exemplul E8.3

Exemplul 8.1

O placă pătrată cu grosimea t și modulul de elasticitate longitudinal E este articulată la trei colțuri și solicitată de o forță F în colțul liber (fig. E8.1, a). Se consideră $\nu = 0$. Să se împartă placa în patru elemente CST și să se calculeze: a) deplasările nodale; b) tensiunile în elemente și c) reacțiunile în reazeme.

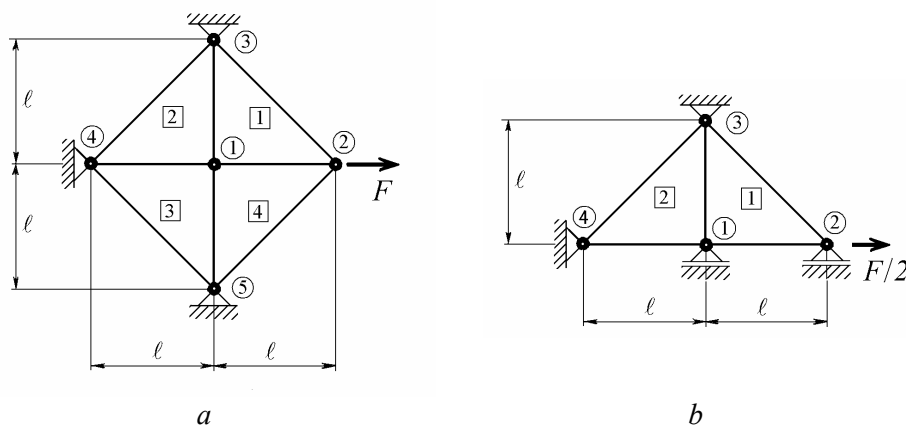


Fig. E8.1

Rezolvare. Matricea de rigiditate a materialului (6.24) este

$$[D] = E \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}. \quad (a)$$

Alegând originea axelor de coordonate în centrul plăcii, coordonatele elementului 1 sunt

$$x_1 = y_1 = 0, \quad x_2 = \ell, \quad y_2 = 0, \quad x_3 = 0, \quad y_3 = \ell.$$

Aria este $A = \ell^2/2$ iar matricea (8.17) este

$$[B^1] = \frac{1}{\ell} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (b)$$

Matricea de rigiditate a elementului (8.18) este

$$[K^1] = [k^1] = [B^1]^T [D] [B^1] t A, \quad (c)$$

$$[K^1] = \frac{Et}{2} \begin{bmatrix} 3/2 & 1/2 & -1 & -1/2 & -1/2 & 0 \\ & 3/2 & 0 & -1/2 & -1/2 & -1 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1/2 & 1/2 & 0 \\ \text{sim} & & & & 1/2 & 0 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}. \quad (d)$$

Elementul 2 poate fi obținut rotind elementul 1 anterior cu 90° . În general, matricea de transformare pentru o rotație cu un unghi θ este

$$[T^e] = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix} \quad (e)$$

unde $c = \cos \theta$ și $s = \sin \theta$.

Matricea de rigiditate a elementului rotit este

$$[K^e] = [T^e]^T [k^e] [T^e]. \quad (f)$$

Pentru $\theta = 90^\circ$ se obține

$$[T^2] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (g)$$

Matricea de rigiditate a elementului 2 este

$$[K^2] = [T^2]^T [k^1] [T^2],$$

$$[K^2] = \frac{Et}{2} \begin{bmatrix} 3/2 & -1/2 & -1/2 & 0 & -1 & 1/2 \\ & 3/2 & 1/2 & -1 & 0 & -1/2 \\ & & 1/2 & 0 & 0 & -1/2 \\ & & & 1 & 0 & 0 \\ \text{sim} & & & & 1 & 0 \\ & & & & & 1/2 \end{bmatrix}. \quad (h)$$

Aceeași matrice se obține înlocuind coordonatele nodale

$$x_1 = y_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad y_2 = 1, \quad x_3 = -1, \quad y_3 = 0$$

în (8.17) și calculând produsul (8.18).

Datorită simetriei, se poate considera numai jumătatea superioară a plăcii (fig. E8.1, *b*). Utilizând condițiile la limită, ecuațiile de echilibru se pot scrie

$$\frac{Et}{2} \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & -1/2 & -1 & 0 & -1 & 1/2 \\ 0 & 3 & 0 & -1/2 & 0 & -2 & 0 & -1/2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1/2 & 1 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ 0 \\ u_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ V_1 \\ F/2 \\ V_2 \\ H_3 \\ V_3 \\ H_4^* \\ V_4 \end{Bmatrix}.$$

Rezolvând sistemul format de prima și a treia ecuație

$$\frac{Et}{2} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F/2 \end{Bmatrix}$$

se obțin deplasările nodale

$$u_1 = \frac{F}{2Et}, \quad u_2 = \frac{3F}{2Et}.$$

Reacțiunile pentru jumătate de placă sunt

$$H_3 = -F/4, \quad H_4^* = -F/4,$$

iar pentru placa întregă

$$H_4 = -F/2, \quad H_5 = -F/4.$$

Tensiunile și deformațiile specifice în elemente sunt

$$\{\varepsilon^1\} = [B^1] \{q^1\} = \frac{1}{\ell} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ 0 \\ u_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix},$$

$$\{\varepsilon^1\} = \frac{1}{\ell} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \frac{F}{2\ell Et} \begin{Bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix}.$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_1 = [D] \{\varepsilon^1\} = E \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \frac{F}{2\ell Et} \begin{Bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix} = \frac{F}{2\ell t} \begin{Bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1/2 \end{Bmatrix},$$

$$\{\varepsilon^2\} = [B^2] \{q^2\} = \frac{1}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{F}{2\ell Et} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix},$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_2 = [D] \{\varepsilon^2\} = E \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \frac{F}{2\ell Et} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix} = \frac{F}{2\ell t} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1/2 \end{Bmatrix}.$$

Exemplul 8.2

O placă triunghiulară subțire este încastrată în lungul laturii 5-4 și încărcată cu forțele coplanare $F_1 = -1$ și $F_2 = -2$ pe latura de sus (fig. E8.2). Se presupune că placa are grosimea $t=1$ și este într-o stare plană de tensiuni, are modulul de elasticitate longitudinal $E=1$ și coeficientul lui Poisson $\nu=0,3$. Să se împartă placa în trei elemente CST și să se calculeze: a) deplasările nodale; b) tensiunile în elemente și c) reacțiunile în încastrare. Unitățile de măsură sunt coerente.

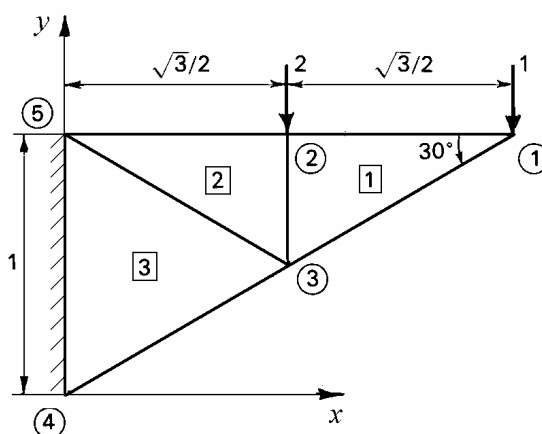


Fig. E8.2

Rezolvare. Datele de intrare sunt date mai jos

NUMAR DE NODURI = 5
 NUMAR DE ELEMENTE = 3
 MODUL DE ELASTICITATE = 1
 COEF. CONTR. TRANSU. = .3
 STARE PLANA DE TENSIUNI
 SARCINI: FORTE LA NODURI

BLOCAJE SI COORDONATE NODURI

NOD	BX	BY	X	Y
1	0	0	1.732	1
2	0	0	.866	1
3	0	0	.866	.5
4	1	1	0	0
5	1	1	0	1

NR	DATE ELEMENTE			GROSIME
	I	J	K	
1	1	2	3	1
2	5	3	2	1
3	5	4	3	1

FORTE LA NODURI

NOD	FX	FY
1	0	-1
2	0	-2

Pentru fiecare element, matricea de rigiditate se calculează “de mână” din relația (8.18), în care matricea $[B]$ se obține din (8.17), pe baza coordonatelor nodale, iar matricea $[D]$ este dată de (6.24).

Rezultă următoarele matrici de rigiditate ale elementelor

MATRICEA DE RIGIDITATE A ELEMENTULUI 1

$$\begin{bmatrix} .3172 & 0 & -.3172 & .1648 & 0 & -.1648 \\ & .111 & .1923 & -.111 & -.1923 & 0 \\ & & .6503 & -.3571 & -.3331 & .1648 \\ \text{SIM} & & & 1.0627 & .1923 & -.9516 \\ & & & & .3331 & 0 \\ & & & & & .9516 \end{bmatrix}$$

MATRICEA DE RIGIDITATE A ELEMENTULUI 2

$$\begin{bmatrix} .3172 & 0 & 0 & .1648 & -.3172 & -.1648 \\ & .111 & .1923 & 0 & -.1923 & -.111 \\ & & .3331 & 0 & -.3331 & -.1923 \\ \text{SIM} & & & .9516 & -.1648 & -.9516 \\ & & & & .6503 & .3571 \\ & & & & & 1.0627 \end{bmatrix}$$

MATRICEA DE RIGIDITATE A ELEMENTULUI 3

$$\begin{bmatrix} .3252 & -.1786 & -0.0079 & -.0137 & -.3172 & .1923 \\ & .5313 & .0137 & -.4203 & .1648 & -.111 \\ & & .3252 & .1786 & -.3172 & -.1923 \\ \text{SIM} & & & .5313 & -.1648 & -.111 \\ & & & & .6345 & 0 \\ & & & & & .2221 \end{bmatrix}$$

Matricea de rigiditate globală condensată este

MATRICEA DE RIGIDITATE GLOBALA

$$\begin{bmatrix} .3172 & 0 & -.3172 & .1648 & 0 & -.1648 \\ & .111 & .1923 & -.111 & -.1923 & 0 \\ & & 1.3006 & 0 & -.6662 & 0 \\ \text{SIM} & & & 2.1254 & 0 & -1.9033 \\ & & & & 1.3006 & 0 \\ & & & & & 2.1254 \end{bmatrix}$$

Ecuțiile de echilibru condensate pot fi scrise

$$\begin{bmatrix} 0,317 & 0 & -0,317 & 0,165 & 0 & -0,165 \\ 0 & 0,111 & 0,192 & -0,111 & -0,192 & 0 \\ -0,317 & 0,192 & 1,301 & 0 & -0,666 & 0 \\ 0,165 & -0,111 & 0 & 2,125 & 0 & -1,903 \\ 0 & -0,192 & -0,666 & 0 & 1,301 & 0 \\ -0,165 & 0 & 0 & -1,903 & 0 & 2,125 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Soluțiile acestor ecuații sunt

$$u_1 = 7,712, \quad u_2 = 6,542, \quad u_3 = -2,686, \\ v_1 = -40,823, \quad v_2 = -15,835, \quad v_3 = -13,582.$$

Datele de ieșire sunt prezentate mai jos :

DEPLASARI NODALE

NOD	DEPL. X	DEPL. Y
1	7.71207	-40.82315
2	6.5416	-15.83532
3	-2.68555	-13.58268
4	0	0
5	0	0

TENSIUNI

ELEM	SIGMA X	SIGMA Y	TAU XY	SIGMA ECH
1	0	-4.505	-4	8.2642
2	6.816	-2.461	0.065	8.3241
3	-3.408	-1.022	-6.032	10.8786

REACTIONI

NOD	FX	FY
4	3.464	1.95078
5	-3.464	1.04922

Reacțiunile în nodurile 4 și 5 se obțin din ecuațiile nereduse “neutilizate”.

Trebuie menționat că placa a fost împărțită într-un număr foarte mic de elemente pentru a permite calculul de mână și aceasta conduce la rezultate false. Era de așteptat ca în lungul laturii 4-5 tensiunile de încovoiere să fie de compresiune în 4 și de întindere în 5. Cu toate acestea, în elementul 3, care este un element cu deformații specifice constante, apare o singură valoare a tensiunii σ_x , ceea ce este greșit. În mod normal, placa ar fi trebuit modelată cu mult mai multe elemente. Atribuind centrelor de greutate valorile tensiunilor constante din elemente și utilizând procedeul de mediere descris în paragraful 8.1.6, se poate obține o distribuție mai realistă a tensiunilor în lungul laturii 4-5.

Exemplul 8.3

O placă dreptunghiulară subțire, având o gaură cu raza $a = 10$ mm, este sollicitată de sarcini care produc tensiuni de întindere constante $\sigma_0 = 5$ MPa la capete (fig. E8.3, a). Placa are lungimea $\ell = 60$ mm, lățimea $b = 40$ mm, grosimea $t = 5$ mm, $E = 200$ GPa și $\nu = 0,3$. Se cere să se determine: a) forma deformată a găurii; b) locul și valoarea tensiunii echivalente (von Mises) maxime; c) distribuția tensiunilor σ_x în secțiunea din mijloc. Să se compare valorile tensiunilor maxime în peretele găurii, calculate cu MEF și cu teoria elasticității.

Rezolvare. Ținând cont de simetria geometrică și de simetria încărcării, se poate analiza doar un sfert de placă (din dreapta sus).

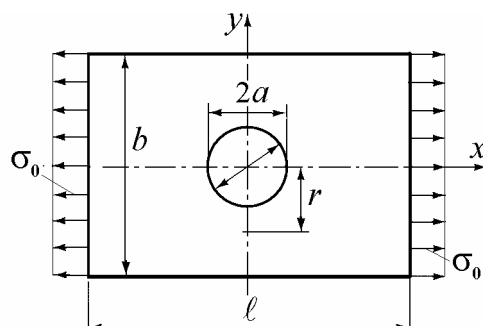


Fig. E8.3, a

Se construiește un model cu 55 noduri și 81 elemente, prezentat în fig. E8.3, b. Fie x și y axele de simetrie. Nodurile plasate în lungul axei x sunt blocate pe direcția y , iar nodurile situate în lungul axei y sunt blocate pe direcția x .

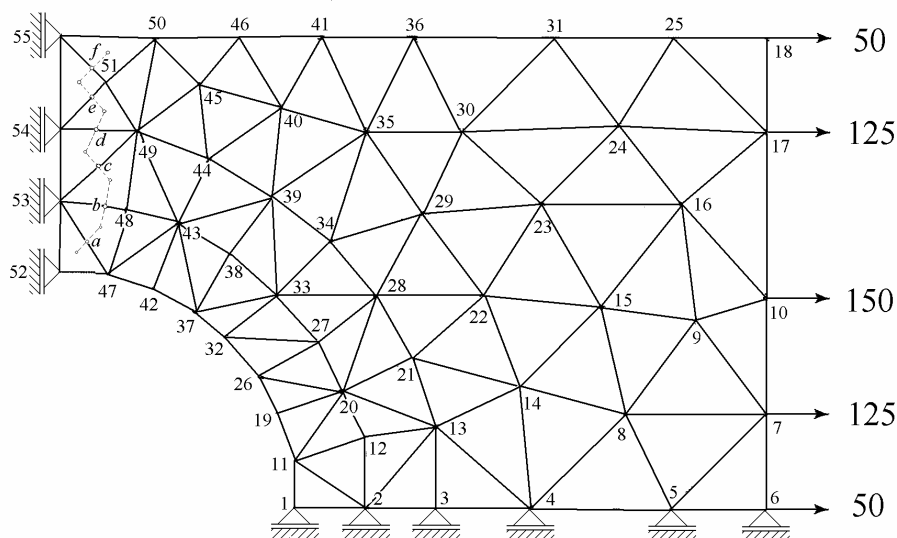
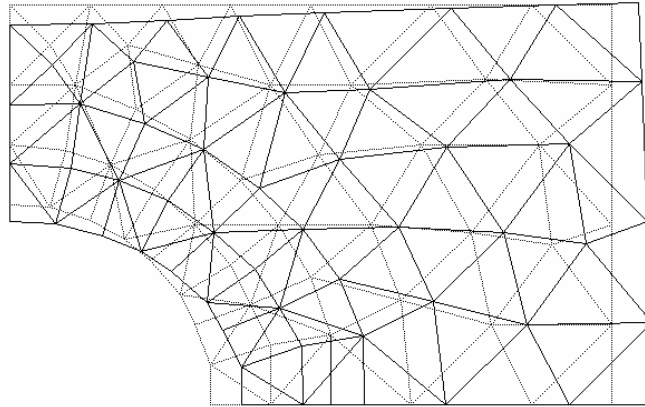


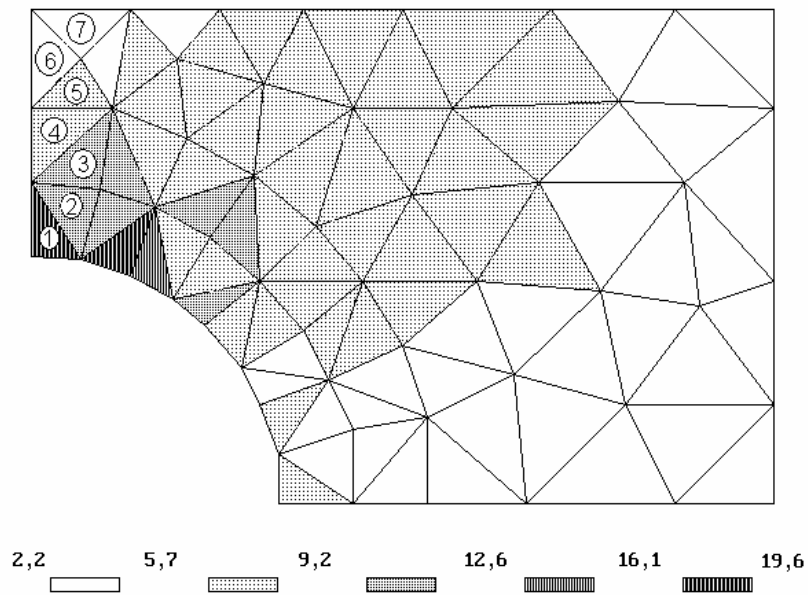
Fig. E8.3, b

În figură se arată forțele echivalente aplicate la noduri. Numerotarea elementelor este omisă pentru claritate. S-au marcat centrele de greutate ale elementelor de lângă secțiunea mediană, iar punctele de intersecție ale laturilor comune cu liniile care unesc centrele de greutate ale elementelor vecine (unde se calculează tensiunile medii) s-au notat de la a la f .

Forma deformată este prezentată în fig. E8.3, c. Cum era de așteptat, gaura este alungită pe direcția de încărcare.

Fig. E8.3, *c*

Calculul tensiunilor este rezumat în fig. E8.3, *d*. Elementele sunt hașurate conform valorii tensiunii echivalente von Mises, utilizând cinci intervale cu limitele arătate în legendă.

Fig. E8.3, *d*

Tensiunea echivalentă maximă este 19,6 MPa și apare în elementul *1*. Valorile tensiunilor în elementele de lângă secțiunea mediană sunt date în Tabelul E8.3.

Tabelul E8.3

Elementul	σ_x	σ_y	τ_{xy}	σ_{ech}
1	20,0178	0,8845	-0,5706	19,6155
2	11,4577	1,9228	-0,6221	10,6821
3	11,3275	0,815	0,0595	10,9433
4	8,068	1,5768	0,927	7,5786
5	7,6445	0,1651	0,174	7,5693
6	5,7162	0,2632	0,6667	5,7073
7	4,0752	0,763	0,3595	3,8037

Tensiunile σ_x , mediate în punctele de la a la f , au următoarele valori:

Punctul	a	b	c	d	e	f
σ_x , MPa	15,78	11,39	9,69	7,85	6,68	4,89

Distribuția teoretică a tensiunilor σ_x în secțiunea mediană a unei plăci cu o gaură circulară mică, sollicitată la întindere uniaxială, este dată de relația

$$\sigma_x = \sigma_0 \left(1 + \frac{a^2}{2r^2} + \frac{3a^4}{2r^4} \right),$$

în care r este distanța de la axa x (fig. E8.3, a).

Tensiunea maximă apare la marginea găurii ($r = a$) și are valoarea

$$\sigma_{x_{max}} = 3\sigma_0 = 15 \text{ MPa} .$$

Valoarea medie pentru elementele 1 și 2, calculată în a , este $\sigma_{x_a} = 15,78 \text{ MPa}$, fiind surprinzător de precisă pentru rețeaua grosieră folosită.

Exemplul 8.4

O placă subțire cu salt de lățime prin racordări este sollicitată axial (fig. E8.4, a), are lungimea 150 mm, lățimea porțiunii înguste 40 mm, lățimea porțiunii mai late 80 mm, grosimea 5 mm, razele de racordare 20 mm, $E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$ și $\nu = 0,25$. Tensiunile normale calculate la distanță de racordări în dreapta au valoarea constantă 440 MPa. Se cere tensiunea echivalentă (von Mises) maximă

din placă și zona în care apare. Să se determine factorul teoretic de concentrare a tensiunilor elastice în zona racordării.

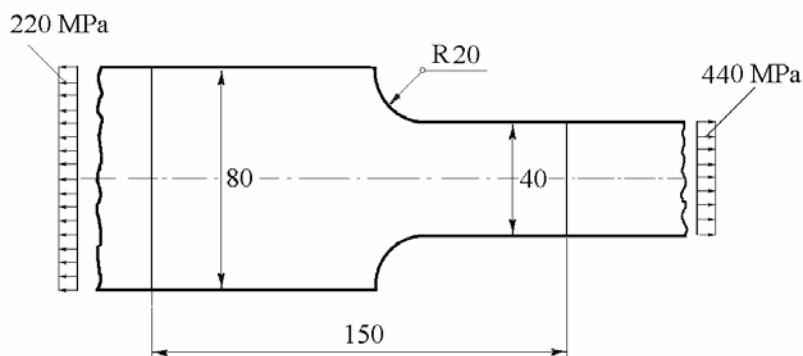


Fig. E8.4, a

Rezolvare. Datorită simetriei se poate considera doar jumătate de placă. Se construiește un model cu 95 noduri și 144 elemente CST (fig. E8.4, b). Nodurile situate în lungul axei de simetrie sunt blocate pe direcție verticală. Nodurile de pe marginea din stânga sunt blocate pe direcție orizontală.

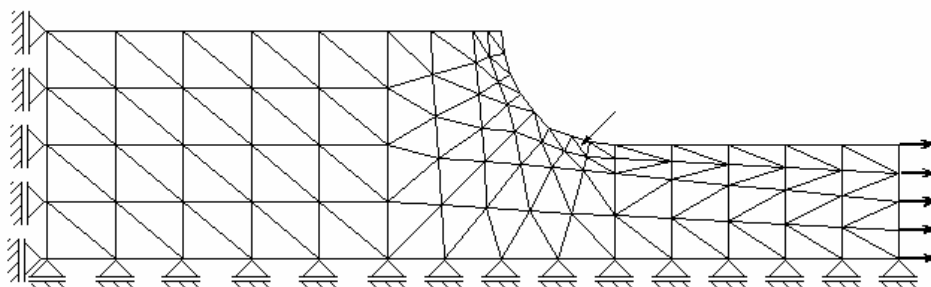


Fig. E8.4, b

Forțele nodale echivalente se calculează cu relațiile (8.19). Pe marginea din dreapta sunt patru elemente, fiecare cu aria 25 mm^2 , solificate de tensiuni normale de 440 N/mm^2 . Forțele nodale pentru fiecare element sunt $440 \times 25 / 2 = 5500 \text{ N}$. Cele cinci forțe nodale care acționează asupra jumătății de placă au valoarea 5500 N în nodul superior și nodul inferior, și 11000 N în cele trei noduri din mijloc.

Distribuția tensiunilor echivalente von Mises este prezentată în fig. E8.4, c pentru cinci intervale valorice date în legendă. Tensiunea echivalentă maximă este $604,7 \text{ MPa}$.

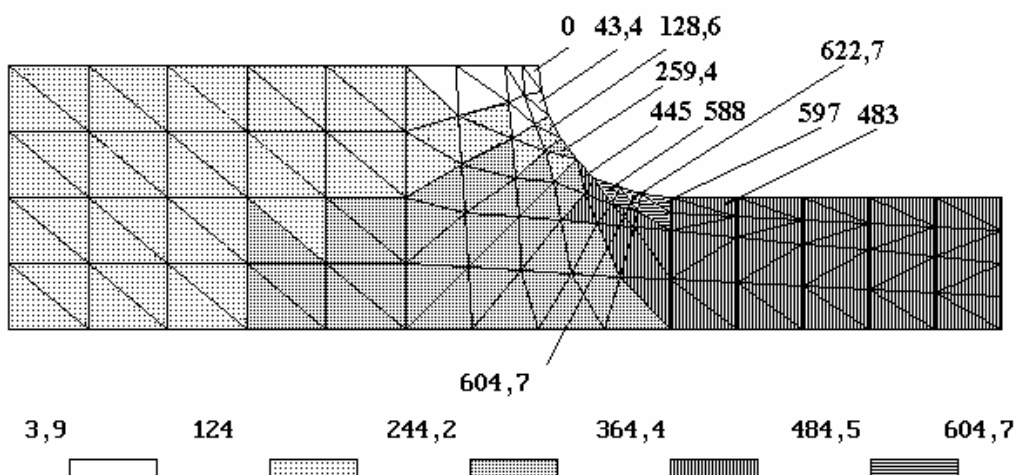


Fig. E8.4, c

Valorile tensiunilor normale principale σ_1 în elementele de lângă conturul racordării sunt prezentate în partea de sus. Valoarea maximă este 622,7 MPa. Factorul teoretic de concentrare a tensiunilor raportat la 440 MPa este 1,415. Această valoare este destul de apropiată de valoarea adevărată teoretică 1,42 stabilită de Singer (1962).

Exemplul 8.5

Se dau coordonatele nodale și deplasările nodale ale elementului 96 din fig. E8.4, b: $x_{60} = 92,35$, $y_{60} = 21,52$, $x_{64} = 95$, $y_{64} = 18$, $x_{65} = 95,5$, $y_{65} = 20,5$;

$$u_{60} = 0,11224, \quad v_{60} = -3,97 \cdot 10^{-3}, \quad u_{64} = 0,12367, \quad v_{64} = -3,63 \cdot 10^{-3},$$

$$u_{65} = 0,12247, \quad v_{65} = -4,92 \cdot 10^{-3}.$$

Se cunosc $E = 2 \cdot 10^5$ MPa și $\nu = 0,25$. Se cer tensiunile din element.

Rezolvare. Aria triunghiului este $A_{96} = 4,1925 \text{ mm}^2$.

Matricea $[B]$ este (8.17)

$$[B] = \begin{bmatrix} -0,2982 & 0 & -0,1216 & 0 & 0,4198 & 0 \\ 0 & 0,0596 & 0 & -0,3757 & 0 & 0,3160 \\ 0,0596 & -0,2982 & -0,3757 & -0,1216 & 0,3160 & 0,4198 \end{bmatrix}.$$

Matricea $[D]$ este (6.24)

$$[D] = 10^5 \begin{bmatrix} 2,1333 & 0,5333 & 0 \\ 0,5333 & 2,1333 & 0 \\ 0 & 0 & 0,8 \end{bmatrix}.$$

Vectorul deplasărilor nodale (8.1) este

$$\{q\} = [0,11224 \quad -3,97 \cdot 10^{-3} \quad 0,12367 \quad -3,63 \cdot 10^{-3} \quad 0,12247 \quad -4,92 \cdot 10^{-3}]^T.$$

Tensiunile din element sunt date de expresia

$$\{\sigma\} = [D][B]\{q\},$$

$$\{\sigma\} = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}]^T = [596,72 \quad 63,58 \quad -120,08]^T.$$

Exemplul 8.6

Să se determine forma deformată și distribuția tensiunilor în dinte unei roți dințate prezentat în fig. E8.6, *a*. Forța nu este aplicată la capătul dintelui, fiind distribuită pe o suprafață mai mare decât suprafața de contact între doi dinți, pentru a diminua efectul de concentrare local și a studia doar efectul geometriei racordărilor de la baza dintelui.

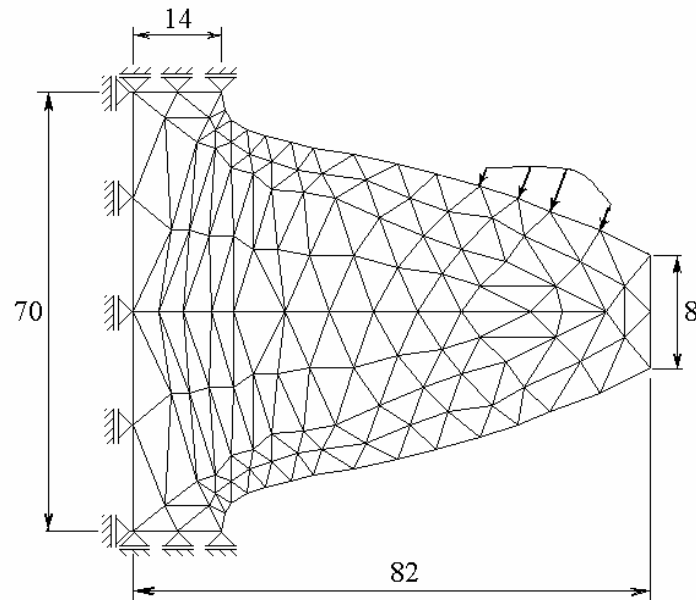


Fig. E8.6, *a*

Rezolvare. Se adoptă un model cu elemente finite cu 126 noduri și 212 elemente CST. Nodurile din încastrare sunt blocate corespunzător. Forma deformată este prezentată în fig. E8.6, b.

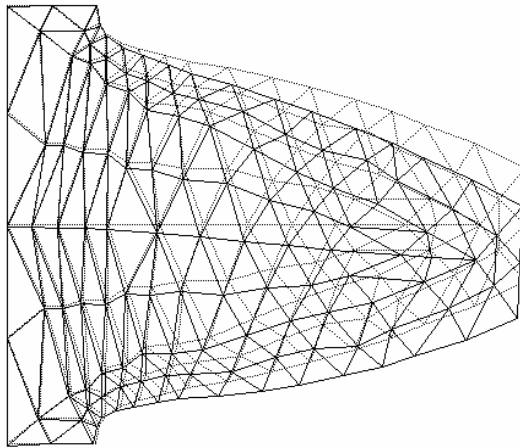


Fig. E8.6, b

Distribuția tensiunilor este arătată în fig. E8.6, c. Se observă concentrarea tensiunilor în cele două regiuni de racordare, unde sunt date valorile tensiunilor echivalente von Mises.

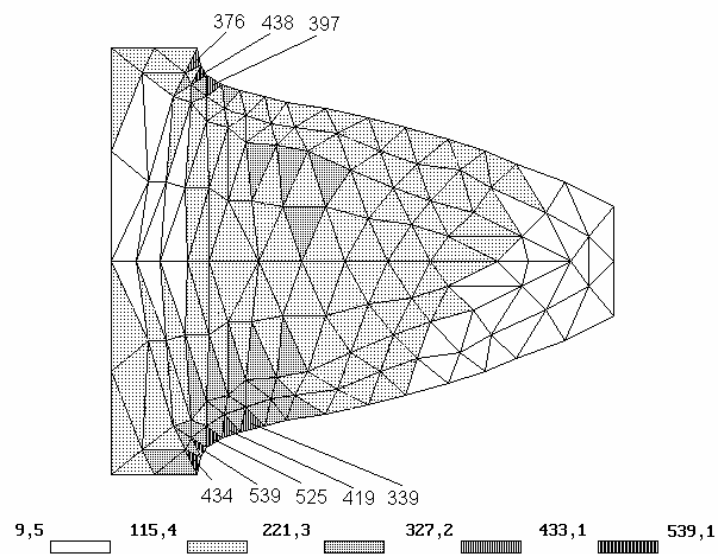


Fig. E8.6, c

8.2 Elemente dreptunghiulare

Elementele finite dreptunghiulare sunt cel mai ușor de analizat, fiind utilizate pentru modelarea rigidizărilor în structuri cu panouri subțiri, grinzilor în formă de cheson și a containerelor paralelipipedice.

8.2.1 Dreptunghiul cu patru noduri (liniar)

Se consideră elementul dreptunghiular cu patru noduri din fig. 8.7.

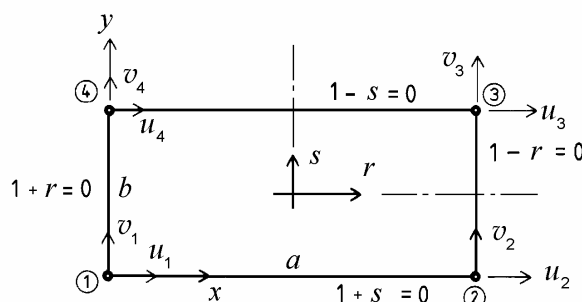


Fig. 8.7

Elementul plan are funcții de formă de două variabile, care au valoarea 1 în nodul cu același indice și zero în celelalte noduri

$$N_i(x_j, y_j) = \delta_{ij}. \quad (8.20)$$

Funcțiile pot fi generate utilizând ecuațiile laturilor. De exemplu, N_1 este identic nulă pe dreptele $x=a$ și $y=b$, și are valoarea 1 la nodul 1, $N_1(x_1, y_1) = 1$, deci trebuie să aibă forma

$$N_1(x, y) = c_1(a-x)(b-y).$$

Din condiția $N_1(x_1, y_1) = N_1(0, 0) = 1$ se obține $c_1 = \frac{1}{ab}$, deci

$$N_1(x, y) = \frac{1}{ab}(a-x)(b-y) = \left(1 - \frac{x}{a}\right) \left(1 - \frac{y}{b}\right).$$

Asemănător, celelalte funcții de formă au expresiile

$$N_2(x, y) = \frac{x}{a} \left(1 - \frac{y}{b}\right), \quad N_3(x, y) = \frac{x}{a} \frac{y}{b}, \quad N_4(x, y) = \frac{y}{b} \left(1 - \frac{x}{a}\right).$$

În vederea integrării numerice, este convenabil să se lucreze în coordonate centrale adimensionale intrinseci (naturale)

$$r = \frac{2x}{a} - 1, \quad s = \frac{2y}{b} - 1. \quad (8.21)$$

Ecuțiile laturilor elementului devin

$$1 \pm r = 0, \quad 1 \pm s = 0. \quad (8.22)$$

Funcțiile de formă în coordonate naturale sunt

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4}(1-r)(1-s), & N_2 &= \frac{1}{4}(1+r)(1-s), \\ N_3 &= \frac{1}{4}(1+r)(1+s), & N_4 &= \frac{1}{4}(1-r)(1+s). \end{aligned} \quad (8.23)$$

Deplasările în interiorul elementului se pot exprima în funcție de deplasările nodale

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q^e \end{Bmatrix}, \quad (8.24)$$

unde

$$\begin{Bmatrix} q^e \end{Bmatrix}^T = [u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3 \quad u_4 \quad v_4]. \quad (8.25)$$

Utilizarea funcțiilor de formă (8.23) are un dezavantaj – ele nu sunt *complete*, adică nu conțin toți termenii în r și s de același grad. Dintre termenii de gradul doi există doar rs dar r^2 și s^2 lipsesc. Rezultă că variația deformațiilor specifice nu are același grad în toate direcțiile, elementul este anizotrop.

Deplasările u și v într-un punct din interiorul dreptunghiului pot fi exprimate în funcție de deplasările nodale printr-o aproximație polinomială. Deoarece, pentru patru noduri cu două grade de libertate pe nod există opt condiții la limită, câmpul de deplasări este aproximat sub forma

$$\begin{aligned} u(x, y) &= a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy, \\ v(x, y) &= b_1 + b_2x + b_3y + b_4xy. \end{aligned} \quad (8.26)$$

Alungirea specifică $\varepsilon_x = a_2 + a_4y$ este constantă pe direcția x în timp ce unghiul de lunecare specifică $\gamma_{xy} = a_3 + a_4x + b_2 + b_4y$ variază liniar cu x și y .

O atenuare a comportării anizotrope se poate obține micșorând variația lunecărilor specifice prin utilizarea *integrării reduce* pentru contribuția forfecării în matricea de rigiditate a elementului. Mulți utilizatori preferă mai bine să folosească elemente de ordin superior decât un număr mai mare de dreptunghiuri mai mici cu 4 noduri. Elementul dreptunghiular cu 4 noduri este utilizat în probleme neliniare, de tipul comportării elasto-plastice, în care rigiditatea trebuie recalculată pe măsura aplicării sarcinilor incrementale și extinderii zonelor deformatate plastic.

Matricea de rigiditate a elementului (7.39) este

$$[k^e] = \int_{V_e} [B]^T [D] [B] dV,$$

unde

$$[B] = [\partial][N].$$

Comportarea deficiară a elementului cu 4 noduri este ilustrată în exemplul de mai jos, în care elementul ar trebui să se comporte ca o bară subțire în care tensiunile de încovoiere sunt predominante.

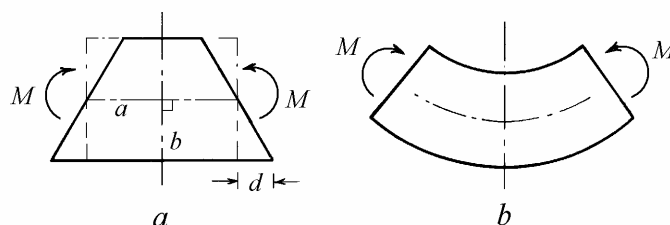


Fig. 8.8

În figura 8.8, *a* se arată forma deformată a unui *singur* element sollicitat la încovoiere pură. Pentru comparație, în fig. 8.8, *b* se prezintă forma deformată în arc de cerc, în absența deformațiilor de forfecare. Elementul cu 4 noduri are fețele laterale plane. La capetele elementului unghiul de deformare specifică este $\gamma_{xy} = d/b$ fiind nul numai în centrul elementului. Alungirile specifice sunt $\varepsilon_x = d/a$ pe fețele superioară și inferioară. Raportul

$$\frac{\text{luncări specifice parazite}}{\text{deformații specifice de încovoiere}} = \frac{a}{b} = \text{raportul de formă.}$$

Aceasta explică rezultatele slabe obținute cu elemente cu raport de formă mare (≥ 3) care au matrici de rigiditate rău condiționate numeric. Discontinuitățile tensiunilor la granița dintre elemente sunt comparabile cu valorile medii ale acestora iar la marginile libere tensiunile nu sunt nule. Deoarece energia de deformație este estimată în minus, tensiunile sunt mai mici decât cele adevărate.

8.2.2 Dreptunghiul cu opt noduri (pătratic)

Elementul dreptunghiular de ordin superior cu 8 noduri este prezentat în fig. 8.9. Adăugarea a 4 noduri înseamnă adăugarea a 4 condiții la limită (sau deplasări nodale) suplimentare, astfel încât se pot adăuga încă 4 termeni (de grad superior) în aproximarea polinomială.

Funcțiile de aproximare a câmpului de deplasări sunt de gradul trei

$$\begin{aligned} u(x, y) &= a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 x^2 + a_5 xy + a_6 y^2 + a_7 x^2 y + a_8 xy^2, \\ v(x, y) &= b_1 + b_2 x + b_3 y + b_4 x^2 + b_5 xy + b_6 y^2 + b_7 x^2 y + b_8 xy^2, \end{aligned} \quad (8.27)$$

deci deformațiile specifice sunt de gradul doi. De notat că alegerea ultimilor doi termeni de forma x^3 și y^3 ar face elementul mai anizotrop. Cele 16 constante pot fi exprimate (interpolate) în funcție de cele 16 deplasări nodale și de coordonatele nodale.

Utilizând aproximarea nodală, câmpul de deplasări se exprimă sub forma

$$\begin{aligned} u &= N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3 + \dots + N_8 u_8, \\ v &= N_1 v_1 + N_2 v_2 + N_3 v_3 + \dots + N_8 v_8, \end{aligned} \quad (8.28)$$

în care funcțiile de formă N_i se construiesc ușor pe baza ecuațiilor dreptelor care trec prin noduri (procedeul *serendipity*).

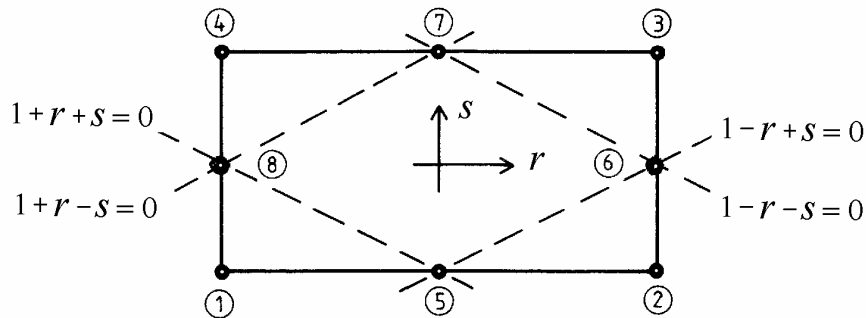


Fig. 8.9

În fig. 8.9, pentru claritate, se arată numai liniile care trec prin nodurile de la mijlocul laturilor, celelalte sunt prezentate în fig. 8.7. În sistemul de coordonate naturale r și s , funcțiile de formă au următoarele expresii

$$\begin{aligned} N_1 &= -\frac{1}{4}(1-r)(1-s)(1+r+s), & N_2 &= -\frac{1}{4}(1+r)(1-s)(1-r+s), \\ N_3 &= -\frac{1}{4}(1+r)(1+s)(1-r-s), & N_4 &= -\frac{1}{4}(1-r)(1+s)(1+r-s), \\ N_5 &= \frac{1}{2}(1-r)(1+r)(1-s), & N_6 &= \frac{1}{2}(1+r)(1-s)(1+s), \\ N_7 &= \frac{1}{2}(1-r)(1+r)(1+s), & N_8 &= \frac{1}{2}(1-r)(1-s)(1+s). \end{aligned} \quad (8.29)$$

Funcția de interpolare N_1 trebuie să fie zero în nodurile 2, 3, ..., 8 și să aibă o valoare egală cu 1 în nodul 1. Cu alte cuvinte, N_1 trebuie să se anuleze pe laturile definite de ecuațiile dreptelor care trec prin nodurile de la 2 la 8: $1-s=0$, $1-r=0$, $1+r+s=0$. Rezultă că N_1 are forma

$$N_1 = c_1 (1-r)(1-s)(1+r+s),$$

unde c_1 este o constantă care se determină din condiția $N_1(-1,-1)=1$, deci $c_1 = -1/4$, ceea ce conduce la expresia funcției N_1 din (8.29).

Deplasările în interiorul unui element pot fi exprimate în funcție de deplasările nodale

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & \cdots & \cdots & N_8 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & \cdots & \cdots & 0 & N_8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q^e \end{Bmatrix}, \quad (8.30)$$

unde

$$\begin{Bmatrix} q^e \end{Bmatrix} = [u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad \cdots \quad \cdots \quad u_8 \quad v_8]^T. \quad (8.31)$$

Odată generate funcțiile de formă $[N]$, se calculează $[B] = [\partial][N]$, apoi matricea de rigiditate a elementului $[k^e]$ poate fi evaluată utilizând $[D]$.

8.3 Elemente triunghiulare

Pentru a obține valori cât mai precise ale tensiunilor utilizând o discretizare cu deformații specifice constante, trebuie folosit un număr mare de elemente. Pentru a reduce numărul necesar de elemente au fost dezvoltate elemente cu deformații specifice descrise de polinoame liniare, de gradul doi sau grad superior.

8.3.1 Coordonate de arie

La un triunghi se poate defini un sistem de coordonate complet simetric, cunoscute sub numele de *coordonate de arie*.

Poziția oricărui punct M în interiorul triunghiului este determinată prin distanțele h_1 , h_2 , h_3 la cele trei laturi (fig. 8.10, a). Prin împărțire la înălțimile triunghiului se obțin coordonatele triunghiulare adimensionale

$$\zeta_1 = \frac{h_1}{H_1}, \quad \zeta_2 = \frac{h_2}{H_2}, \quad \zeta_3 = \frac{h_3}{H_3},$$

sau în funcție de arii

$$\zeta_1 = \frac{A_1}{A}, \quad \zeta_2 = \frac{A_2}{A}, \quad \zeta_3 = \frac{A_3}{A}. \quad (8.32)$$

Deoarece $A_1 + A_2 + A_3 = A$ (fig. 8.10, b), rezultă

$$\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 = 1, \quad (8.33)$$

deci cele trei coordonate nu sunt independente și se comportă ca niște funcții de formă.

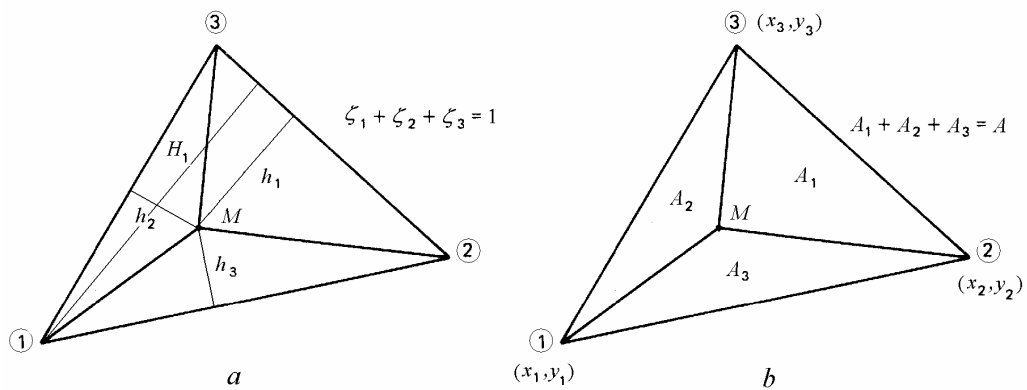


Fig. 8.10

Coordonatele fizice ale punctului M pot fi exprimate în funcție de coordonatele nodale sub forma

$$\begin{aligned} x &= \zeta_1 x_1 + \zeta_2 x_2 + \zeta_3 x_3, \\ y &= \zeta_1 y_1 + \zeta_2 y_2 + \zeta_3 y_3, \end{aligned} \quad (8.34)$$

sau matricial

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \end{Bmatrix}.$$

Prin inversare se obține relația (8.12)

$$\begin{Bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix}$$

sau

$$\zeta_i = \frac{1}{2A}(\alpha_i + \beta_i x + \gamma_i y). \quad (i=1, 2, 3) \quad (8.35)$$

în care A este dat de (8.9) iar coeficienții α_i , β_i , γ_i au expresiile (8.8)

$$\alpha_i = x_j y_k - x_k y_j, \quad \beta_i = y_j - y_k, \quad \gamma_i = x_k - x_j.$$

8.3.2 Triunghiul cu deformații specifice liniare

Triunghiul cu deformații specifice liniare, denumit LST (*linear strain triangle*), este un element cu șase noduri, obținut adăugând trei noduri în mijlocul laturilor elementului CST. În fig. 8.11, se arată ecuațiile celor trei laturi și ale dreptelor care trec prin mijloacele laturilor utilizând coordonatele de arie.

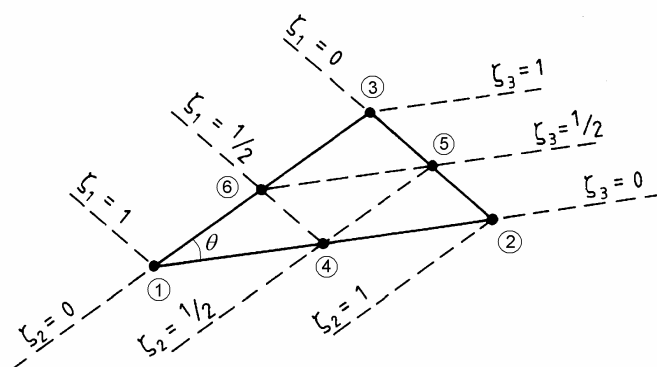


Fig. 8.11

Funcțiile de formă au următoarele expresii

$$N_1 = 2 \left(\zeta_1 - \frac{1}{2} \right) \zeta_1, \quad N_2 = 2 \left(\zeta_2 - \frac{1}{2} \right) \zeta_2, \quad N_3 = 2 \left(\zeta_3 - \frac{1}{2} \right) \zeta_3, \quad (8.36)$$

$$N_4 = 4 \zeta_1 \zeta_2, \quad N_5 = 4 \zeta_2 \zeta_3, \quad N_6 = 4 \zeta_3 \zeta_1.$$

Deplasările se exprimă în funcție de deplasările nodale sub forma

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & \cdots & \cdots & N_6 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & \cdots & \cdots & 0 & N_6 \end{bmatrix} \{ q^e \}, \quad (8.37)$$

unde

$$\{ q^e \} = [u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad \cdots \quad \cdots \quad u_6 \quad v_6]^T. \quad (8.38)$$

Pentru a obține matricea $[B] = [\partial][N]$ trebuie calculate derivatele funcțiilor de formă în raport cu coordonatele fizice, deci este necesară transformarea de la x, y la $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$. Pe baza relației (8.33) se elimină ζ_1 în expresiile (8.34) rezultând

$$\begin{aligned} x &= (x_2 - x_1)\zeta_2 + (x_3 - x_1)\zeta_3 + x_1, \\ y &= (y_2 - y_1)\zeta_2 + (y_3 - y_1)\zeta_3 + y_1. \end{aligned} \quad (8.39)$$

Regula derivării parțiale a funcțiilor de două variabile se scrie matricial

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \zeta_2} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta_3} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \zeta_2} & \frac{\partial y}{\partial \zeta_2} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta_3} & \frac{\partial y}{\partial \zeta_3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix}, \quad (8.40)$$

unde $[J]$ este jacobianul transformării.

Relația inversă este

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \zeta_2} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta_3} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_2 & \gamma_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \zeta_2} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta_3} \end{Bmatrix}, \quad (8.41)$$

unde A este aria triunghiului (8.9) iar β_i, γ_i sunt definite de (8.8).

Matricea de rigiditate a elementului este

$$[k^e] = \int_A [B]^T [D][B] t^e dA, \quad (8.42)$$

unde

$$dA = \ell_3 d\zeta_2 \ell_2 d\zeta_3 \sin\theta = 2A d\zeta_2 d\zeta_3.$$

Integrarea se face de obicei numeric. Totuși, se poate rezolva explicit în funcție de a, b și $[D]$ utilizând formula de integrare pentru monoame

$$\int_A \zeta_i^a \zeta_j^b dA = 2A \frac{a! b!}{(2+a+b)!}. \quad (8.43)$$

Pentru termenii de gradul întâi și gradul doi se obține

$$\int_A \zeta_i dA = \frac{A}{3}, \quad \int_A \zeta_i \zeta_j dA = \frac{A}{12}, \quad \int_A \zeta_i^2 dA = \frac{A}{6}. \quad (8.44)$$

Elementul LST se bazează pe exprimarea deplasărilor prin polinoame de gradul doi *complete* în ζ_2 și ζ_3

$$\begin{aligned} u &= a_1 + a_2 \zeta_2 + a_3 \zeta_3 + a_4 \zeta_2^2 + a_5 \zeta_2 \zeta_3 + a_6 \zeta_3^2, \\ v &= b_1 + b_2 \zeta_2 + b_3 \zeta_3 + b_4 \zeta_2^2 + b_5 \zeta_2 \zeta_3 + b_6 \zeta_3^2. \end{aligned} \quad (8.45)$$

Câmpul deplasărilor este *complet*, conținând toți termenii posibili de gradul doi, astfel că elementul este izotrop, fără să fie necesare noduri interioare care complică inutil calculele. Există 12 deplasări nodale, câte 6 pe fiecare direcție. Pentru a satisface compatibilitatea deplasărilor la granița între elemente, funcția deplasărilor unei laturi trebuie să conțină numai deplasările nodale de pe latura respectivă. În acest caz există trei constante (funcția este de gradul doi) fiind necesar un nod interior pe fiecare latură. Acesta este amplasat convenabil în mijlocul laturii.

Calculând constantele în funcție de deplasările nodale, se obține aproximarea nodală (8.37).

Notând

$$\zeta_2 = r, \quad \zeta_3 = s, \quad \zeta_1 = 1 - \zeta_2 - \zeta_3 = 1 - r - s \quad (8.46)$$

se pot introduce coordonate triunghiulare oblice (fig. 8.12).

Coordonatele fizice într-un punct al triunghiului au expresiile

$$\begin{aligned} x &= (1 - r - s)x_1 + r x_2 + s x_3, \\ y &= (1 - r - s)y_1 + r y_2 + s y_3. \end{aligned} \quad (8.47)$$

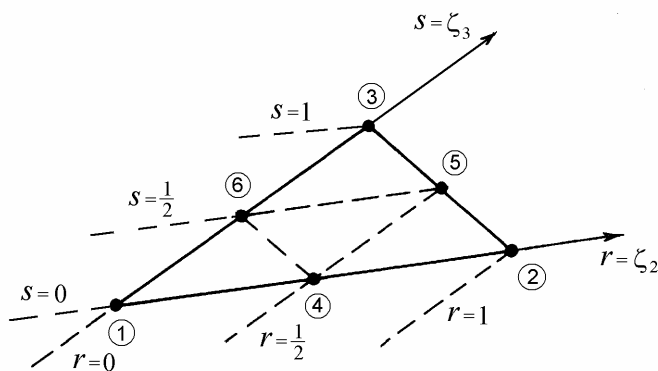


Fig. 8.12

Coeficienții coordonatelor nodale sunt funcții de interpolare geometrică

$$N_1 = 1 - r - s, \quad N_2 = r, \quad N_3 = s, \quad (8.48)$$

Deplasările nodale la un triunghi cu 3 noduri se pot scrie sub forma

$$\begin{aligned} u &= (1-r-s)u_1 + r u_2 + s u_3, \\ v &= (1-r-s)v_1 + r v_2 + s v_3, \end{aligned} \quad (8.49)$$

astfel că aceleași funcții pot fi utilizate ca funcții de formă. Aceasta este ideea de bază care stă la baza elementelor *izoparametrice*, analizate în capitolul următor.

8.3.3 Triunghiul cu deformații specifice pătratice

Un element triunghiular cu un câmp de deformații specifice de gradul doi poate fi construit în două moduri. O posibilitate este să se lucreze cu 3 noduri la colțuri și câte două noduri pe fiecare latură, alegând componentele deplasărilor drept cantități nodale. Acest element este arătat în fig. 8.13, *a*.

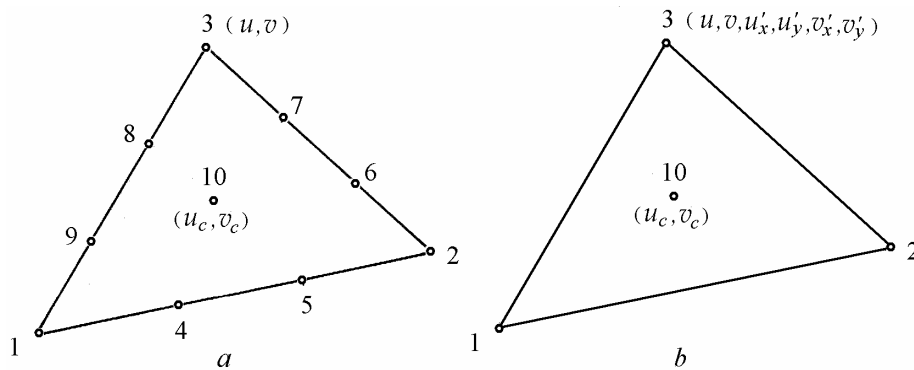


Fig. 8.13

Deplasările se exprimă prin polinoame de gradul trei complete. Pentru a satisface compatibilitatea deplasărilor la granița dintre elemente, funcția deplasărilor unei laturi trebuie să conțină numai deplasările nodale de pe latura respectivă. Funcția fiind de gradul trei, pentru a defini distribuția de pe latura respectivă sunt necesare 4 mărimi nodale, deci două noduri interioare. Nodurile de pe laturi se dispun la distanțe egale între ele și față de colțuri. Deoarece un polinom complet de gradul trei are 10 termeni și pe contur sunt numai 9 noduri, pentru a asigura completitudinea polinomului mai trebuie adăugat un nod interior, altfel elementul va fi anizotrop. Nodul interior este amplasat convenabil în centrul de greutate al triunghiului.

Dezvoltarea nodală a deplasărilor are forma

$$u = \sum_{i=1}^9 N_i u_i + N_c u_c, \quad v = \sum_{i=1}^9 N_i v_i + N_c v_c, \quad (8.50)$$

unde funcțiile de formă sunt

$$\begin{aligned}
N_1 &= \frac{1}{2} \zeta_1 (3\zeta_1 - 1)(3\zeta_1 - 2), & N_2 &= \frac{1}{2} \zeta_2 (3\zeta_2 - 1)(3\zeta_2 - 2), \\
N_3 &= \frac{1}{2} \zeta_3 (3\zeta_3 - 1)(3\zeta_3 - 2), \\
N_4 &= \frac{9}{2} \zeta_1 \zeta_2 (3\zeta_1 - 1), & N_5 &= \frac{9}{2} \zeta_1 \zeta_2 (3\zeta_2 - 1), \\
N_6 &= \frac{9}{2} \zeta_2 \zeta_3 (3\zeta_2 - 1), & N_7 &= \frac{9}{2} \zeta_2 \zeta_3 (3\zeta_3 - 1), \\
N_8 &= \frac{9}{2} \zeta_3 \zeta_1 (3\zeta_3 - 1), & N_9 &= \frac{9}{2} \zeta_3 \zeta_1 (3\zeta_1 - 1), \\
N_c &= 27 \zeta_1 \zeta_2 \zeta_3.
\end{aligned} \tag{8.51}$$

O altă posibilitate este să se lucreze cu noduri dispuse *numai* la colțurile elementului, pentru a reduce lățimea de bandă a matricii de rigiditate. Soluția este să se aleagă derivatele $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ ca mărimi nodale. În fiecare colț, apar șase variabile nodale, două deplasări și patru derivate de ordinul întâi, în total 18 parametri (fig. 8.13, *b*). Pentru completitudine mai sunt necesare încă două variabile, pentru care s-au ales componentele deplasării centrului de greutate (u_c, v_c) .

Dezvoltarea nodală pentru u are expresia

$$u = N_1 u_1 + N_2 u'_{x1} + N_3 u'_{y1} + N_4 u_2 + N_5 u'_{x2} + \dots + N_9 u'_{y3} + N_c u_c. \tag{8.52}$$

În (8.52) polinoamele de interpolare, exprimate în funcție de coordonatele triunghiulare, sunt

$$\begin{aligned}
N_1 &= \zeta_1^2 (\zeta_1 + 3\zeta_2 + 3\zeta_3) - 7\zeta_1 \zeta_2 \zeta_3, \\
N_2 &= \zeta_1^2 (\gamma_3 \zeta_2 - \gamma_2 \zeta_3) + (\gamma_2 - \gamma_3) \zeta_1 \zeta_2 \zeta_3, \\
N_3 &= \zeta_1^2 (\beta_2 \zeta_3 - \beta_3 \zeta_2) + (\beta_3 - \beta_2) \zeta_1 \zeta_2 \zeta_3, \\
N_4 &= \zeta_2^2 (\zeta_2 + 3\zeta_3 + 3\zeta_1) - 7\zeta_1 \zeta_2 \zeta_3, \\
N_5 &= \zeta_2^2 (\gamma_1 \zeta_3 - \gamma_3 \zeta_1) + (\gamma_3 - \gamma_1) \zeta_1 \zeta_2 \zeta_3, \\
N_6 &= \zeta_2^2 (\beta_3 \zeta_1 - \beta_1 \zeta_3) + (\beta_1 - \beta_3) \zeta_1 \zeta_2 \zeta_3, \\
N_7 &= \zeta_3^2 (\zeta_3 + 3\zeta_1 + 3\zeta_2) - 7\zeta_1 \zeta_2 \zeta_3, \\
N_8 &= \zeta_3^2 (\gamma_2 \zeta_1 - \gamma_1 \zeta_2) + (\gamma_1 - \gamma_2) \zeta_1 \zeta_2 \zeta_3, \\
N_9 &= \zeta_3^2 (\beta_1 \zeta_2 - \beta_2 \zeta_1) + (\beta_2 - \beta_1) \zeta_1 \zeta_2 \zeta_3, \\
N_c &= 27 \zeta_1 \zeta_2 \zeta_3,
\end{aligned} \tag{8.53}$$

unde γ_i, β_i sunt definite de (8.8) iar indicele c se referă la centrul de greutate.

Aceleași funcții de interpolare sunt valabile pentru v .

8.4 Echilibru, convergență și compatibilitate

În continuare se prezintă câteva comentarii generale asupra satisfacerii condițiilor de echilibru și de compatibilitate într-o soluție cu elemente finite, bazată pe un câmp de deplasări predeterminat [33].

8.4.1 Echilibru și compatibilitate

Într-o rezolvare prin M.E.F. bazată pe un câmp de deplasări predeterminat:

a) În interiorul elementelor, *compatibilitatea este îndeplinită* atunci când câmpul de deplasări presupus este continuu, dar *echilibrul* nu este îndeplinit.

Se consideră ecuațiile de echilibru exprimate în funcție de deplasări, pentru $p_{vx} = p_{vy} = 0$. Înlocuind relațiile între tensiuni și deformații specifice (6.24) în ecuațiile de echilibru (6.7) se obține

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial}{\partial y} \gamma_{xy} &= 0, \\ \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial}{\partial x} \gamma_{xy} + \frac{\partial}{\partial y} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x) &= 0. \end{aligned} \quad (8.54)$$

Înlocuind relațiile între deformații specifice și deplasări (6.16) în (8.54) rezultă

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{1+\nu}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right), \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} &= \frac{1+\nu}{2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right). \end{aligned} \quad (8.55)$$

Ecuațiile (8.55) nu sunt satisfăcute de câmpul de deplasări (8.26)

$$\begin{aligned} u(x, y) &= a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 xy, \\ v(x, y) &= b_1 + b_2 x + b_3 y + b_4 xy \end{aligned} \quad (8.56)$$

asumat pentru elementul dreptunghiular.

De exemplu,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a_2 + a_4 y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = a_3 + a_4 x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \text{și} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = b_4$$

care nu este zero, deci prima ecuație (8.55) nu este satisfăcută.

Dreptunghiul ar satisface echilibrul dacă $a_4 = b_4 = 0$, dar aceasta se realizează doar într-un câmp cu deformații specifice constante. Însă cum s-a arătat deja, alungirea specifică ε_x variază liniar în direcția y în timp ce unghiul de lunecare specifică γ_{xy} variază liniar cu x și y .

Totuși, echilibrul este realizat în elementul CST datorită simplității acestuia. De aici nu se poate trage concluzia că, în general, dreptunghiul este inferior triunghiului. În unele cazuri acesta poate da rezultate mai bune.

b) La granița între elemente, compatibilitatea poate sau nu să fie îndeplinită, iar *echilibrul* de obicei nu este îndeplinit.

De exemplu, pentru triunghiul cu 3 noduri și pentru dreptunghiul cu 4 noduri, u și v variază liniar cu x (sau y) în lungul laturilor. Rezultă că laturile rămân drepte și după deformare, iar elementele vecine nu se suprapun sau nu lasă goluri între ele. La CST echilibrul la granița între elemente nu este îndeplinit, tensiunile fiind constante în interiorul fiecărui element dar diferite de la un element la altul. Totuși continuitatea tensiunilor între elemente se realizează la grinzi de secțiune constantă, încărcate doar la noduri.

Atunci când compatibilitatea între elemente este îndeplinită, soluția cu elemente finite corespunde unei limite superioare a energiei potențiale totale. Pe măsură ce dimensiunea elementelor finite scade și numărul acestora crește, soluția converge monoton spre cea adevărată, cu condiția ca noua discretizare să conțină toate nodurile discretizării anterioare.

c) La noduri, compatibilitatea se realizează prin interconectarea elementelor la noduri; *echilibrul* forțelor nodale este îndeplinit.

Ecuțiile MEF sunt ecuații de echilibru iar soluțiile acestora asigură anularea rezultatelor forțelor și a momentelor care acționează asupra fiecărui nod. Într-o rezolvare corectă, orice violare a echilibrului și compatibilității se atenuează prin utilizarea unui număr mai mare de elemente mai mici. În plus, convergența deplasărilor cu micșorarea dimensiunii elementelor trebuie să fie monotonă prin valori crescătoare.

8.4.2 Convergență și compatibilitate

Pe măsură ce dimensiunile elementelor finite scad, șirul soluțiilor unei probleme este convergent monoton spre rezultatul corect, dacă deplasările aproximative ale elementului satisfac următoarele condiții:

a) Câmpul de deplasări în interiorul unui element trebuie să fie *continuu*. Aceasta se realizează prin alegerea funcțiilor de formă.

b) Dacă nodurilor li se impun deplasări corespunzătoare unei stări de deformații specifice constante, atunci câmpul de deplasări trebuie să producă o stare de *deformații specifice constante* în tot elementul.

Verificarea se face aplicând “testul peticului”. Modelul este compus din mai multe elemente aranjate astfel încât cel puțin un nod să fie complet înconjurat de elemente. Nodurilor de la periferie li se impun deplasări sau forțe care să producă o stare de deformații specifice constante. Nodurile interioare nu sunt blocate și nu sunt acționate de forțe. Deplasările, deformațiile specifice și tensiunile din interiorul elementului trebuie să corespundă unei stări de deformații specifice constante. În caz contrar, tipul de element este inacceptabil sau cel puțin suspect (se poate întâmpla ca elementul să fie acceptabil doar în anumite configurații).

c) Să fie descrise exact *deplasările de corp rigid*. Dacă nodurilor li se impun deplasări de corp rigid, atunci elementul trebuie să aibă deformații specifice (și tensiuni) nule, și deci forțe nodale nule.

Dacă nu se îndeplinește această condiție, apar forțe nodale suplimentare, și ecuațiile de echilibru la noduri sunt modificate. Pentru a satisface condițiile privind deplasările de corp rigid și starea de deformații specifice constante, funcția de aproximare trebuie să fie un polinom complet de grad cel puțin egal cu ordinul derivatei celei mai înalte ce apare în relațiile între deformații specifice și deplasări.

d) *Compatibilitatea* trebuie asigurată la granița dintre elemente. Elementele nu trebuie să se suprapună sau să aibă spații între ele. În cazul elementelor de grindă, placă sau înveliș, pantele trebuie să fie egale la granița dintre elemente.

Cerința nu este îndeplinită de numeroase elemente neconforme utilizate cu succes. Acestea satisfac compatibilitatea la granița între elemente pe măsură ce discretizarea este mai fină și elementele se apropie mai mult de starea cu deformații specifice constante. Totuși, elementele incompatibile nu permit calcularea unei limite pentru energia potențială; adică nu se poate ști dacă energia potențială corespunzătoare unui anumit element neconform este mai mare sau mai mică decât valoarea adevărată. De asemenea, cu elemente necompatibile nu se poate construi o secvență minimizatoare. Înseamnă că impunând o anumită configurație pentru a n -a discretizare, este imposibil să se reproducă formele deformate pentru cele $(n-1)$ discretizări anterioare.

e) Elementele nu trebuie să aibă direcții preferențiate. Elementele trebuie să fie *invariante* în raport cu direcția forțelor. Izotropia se obține prin utilizarea unor polinoame *complete* pentru descrierea câmpurilor de deplasări ale elementului. Ea poate fi realizată chiar cu polinoame incomplete dacă se utilizează o reprezentare “echilibrată” a termenilor în dezvoltarea polinomială.

Exemplul 8.7

Pentru ansamblul de 4 elemente triunghiulare din fig. E8.6, *testul peticului* se poate face după cum urmează.

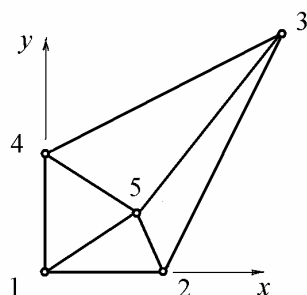


Fig. E8.7

Se presupune un câmp de deplasări

$$u = v = x + y$$

pentru care deformațiile specifice sunt

$$\{\varepsilon\} = [1 \quad 1 \quad 2]^T.$$

Deplasările nodale corespunzătoare au valorile

$$\begin{aligned} u_1 = 0, \quad u_2 = 1, \quad u_3 = 4, \quad u_4 = 1, \\ v_1 = 0, \quad v_2 = 1, \quad v_3 = 4, \quad v_4 = 1. \end{aligned}$$

Dacă se aplică modelului aceste condiții la limită, nodul interior trebuie să se comporte corespunzător.

Sistemul condensat al ecuațiilor de echilibru are forma

$$[K] \begin{Bmatrix} u_5 \\ v_5 \end{Bmatrix} = \{F\},$$

unde $[K]$ depinde de proprietățile materialului și $\{F\}$ depinde atât de proprietățile materialului cât și de deplasările nodale impuse.

Soluția trebuie să fie

$$u_5 = v_5 = 1,25$$

iar deformațiile specifice în orice punct să aibă valorile $\{\varepsilon\} = [1 \quad 1 \quad 2]^T$.

9.

ELEMENTE IZOPARAMETRICE

Elementele finite dreptunghiulare și triunghiulare permit calculul direct al matricilor de rigiditate și vectorilor forțelor nodale. Construcția funcțiilor de formă și calculul matricilor de rigiditate ale elementelor patrulatere și ale elementelor de ordin superior cu laturi curbe întâmpină dificultăți care sunt depășite prin utilizarea elementelor *izoparametrice* și a integrării numerice. Elementele cu laturi curbe permit o mai bună aproximare a marginilor curbe ale structurilor reale.

În cazul elementelor izoparametrice, se folosesc aceleași funcții de formă pentru definirea atât a formei unui element cât și a câmpului de deplasări în interiorul elementului. Triunghiul cu deformații specifice constante este un element izoparametric deși acesta nu a fost analizat ca atare. De fapt, *funcțiile* de interpolare sunt aceleași și nu parametrii. Se pot construi elemente *subparametrice* a căror geometrie este definită de un model de grad mai mic decât cel al deplasărilor. Prin transformarea dreptunghiului cu 8 noduri într-un patrulater cu laturi drepte se obține un element subparametric. Prin transformarea acestuia într-un patrulater cu laturi curbe parabolice, rezultatul este un element izoparametric. Când se dezvoltă elemente triunghiulare de grad superior dar laturile se mențin drepte, acestea sunt elemente subparametrice, deoarece crește doar gradul aproximării polinomiale a deplasărilor în timp ce gradul aproximării polinomiale a geometriei rămâne același.

9.1 Elementul patrulater liniar

Se consideră un element patrulater oarecare, ca în fig. 9.1, *a*. Nodurile locale 1, 2, 3 și 4 sunt numerotate în sens antiorar. Coordonatele nodului i sunt (x_i, y_i) . Fiecare nod are două grade de libertate. Componentele deplasării unui nod local i se notează u_i în direcția x și v_i în direcția y . Vectorul deplasărilor nodale ale elementului este

$$\{q^e\} = [u_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2 \ u_3 \ v_3 \ u_4 \ v_4]^T. \quad (9.1)$$

9.1.1 Coordonate naturale

Se poate atașa unui element patrulater un sistem de coordonate *naturale* ca în fig. 9.1, *b*. Coordonatele r și s iau valori de la -1 în lungul unei laturi, la $+1$ în lungul laturii opuse, având valoarea zero în mijlocul laturilor. Acestea se mai numesc *coordonaate patrulatere*.

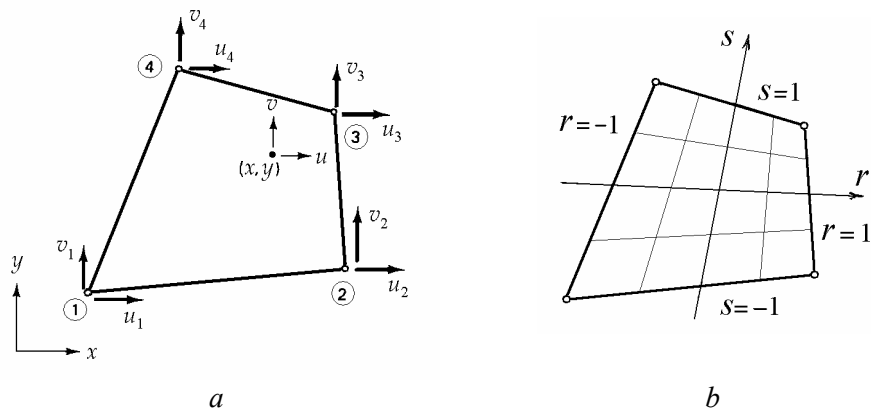


Fig. 9.1

În definierea elementelor izoparametrice, coordonatele patrulatere pot fi privite drept coordonate carteziene în planul $\{r, s\}$, care devine un *plan de referință*. În planul de referință, elementele patrulatere devin un pătrat cu latura egală cu 2 (fig. 9.2, *a*), numit *elementul de referință* (sau *elementul master*), care se extinde între $r \in [-1, 1]$ și $s \in [-1, 1]$. Transformarea dintre coordonatele naturale $\{r, s\}$ din planul de referință și coordonatele carteziene $\{x, y\}$ este o *aplicație izoparametrică*.

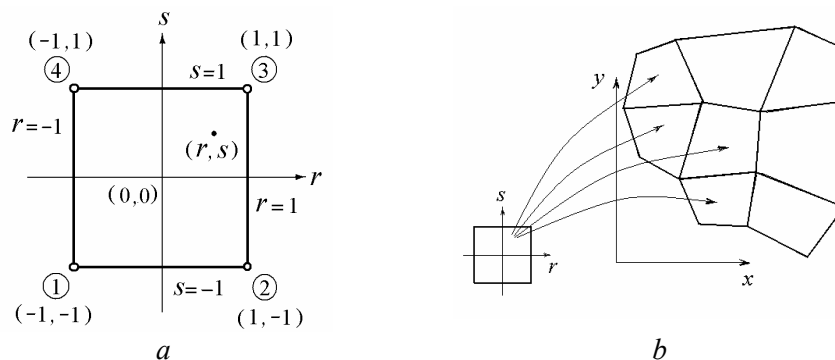


Fig. 9.2

Orice patrulater ‘copil’ din planul $\{x, y\}$ este generat de elementul ‘părinte’ sau ‘de referință’ din planul $\{r, s\}$ (fig. 9.2, *b*). Avantajul constă în faptul că funcțiile de interpolare definite pentru elementul de referință sunt aceleași pentru toate elementele reale și au expresii simple. Dezavantajul constă în faptul că aplicația este o transformare de coordonate care atrage complicații la calculul integralei din expresia matricii de rigiditate a unui element.

9.1.2 Funcțiile de formă

În acest caz se utilizează funcțiile de interpolare (8.23) stabilite pentru elementul dreptunghiular

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4}(1-r)(1-s), & N_2 &= \frac{1}{4}(1+r)(1-s), \\ N_3 &= \frac{1}{4}(1+r)(1+s), & N_4 &= \frac{1}{4}(1-r)(1+s). \end{aligned} \quad (9.2)$$

Relațiile (9.2) se mai scriu sub forma compactă

$$N_i(r, s) = \frac{1}{4}(1 + r r_i)(1 + s s_i), \quad (9.3)$$

în care (r_i, s_i) sunt coordonatele nodului i .

Coordonatele unui punct din interiorul elementului se pot exprima în funcție de coordonatele nodale prin relațiile

$$\begin{aligned} x &= N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3 + N_4 x_4 = \sum_{i=1}^4 N_i x_i, \\ y &= N_1 y_1 + N_2 y_2 + N_3 y_3 + N_4 y_4 = \sum_{i=1}^4 N_i y_i. \end{aligned} \quad (9.4)$$

În formă matricială

$$x = [N] \{x^e\} = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix}, \quad (9.4, a)$$

$$y = [N] \{y^e\} = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{Bmatrix}. \quad (9.4, b)$$

9.1.3 Câmpul deplasărilor

În formularea izoparametrică, pentru exprimarea deplasărilor în interiorul unui element în funcție de valorile la noduri, se utilizează aceleași funcții de formă ca pentru definirea formei elementului.

Dacă u și v sunt componentele deplasărilor unui punct situat la (r, s) , atunci

$$\begin{aligned} u &= N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3 + N_4 u_4 = \sum_{i=1}^4 N_i u_i, \\ v &= N_1 v_1 + N_2 v_2 + N_3 v_3 + N_4 v_4 = \sum_{i=1}^4 N_i v_i, \end{aligned} \quad (9.5)$$

care se pot scrie matricial sub forma

$$\{u\} = [N] \{q^e\}, \quad (9.6)$$

unde

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix}. \quad (9.7)$$

Deoarece funcțiile de formă în coordonate naturale (9.2) satisfac continuitatea geometrică și a deplasărilor atât în interiorul elementelor cât și la granița între elemente, condiția de compatibilitate este satisfăcută și în coordonate carteziane. Așa cum s-a arătat în Capitolul 8, modelele polinomiale sunt inerent continue în interiorul elementelor. Mai mult, se poate arăta ușor că deplasările punctelor de pe latura unui element depind doar de nodurile de pe latura respectivă.

Dacă deplasarea u este aproximată prin

$$u(r, s) = a_1 + a_2 r + a_3 s + a_4 r s, \quad (9.8)$$

în lungul fiecărei laturi aproximația este liniară, deoarece r (sau s) este constant.

De exemplu, în lungul laturii 2-3 (fig. 9.2, a), $r = 1$ și

$$u|_{r=1} = a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) s,$$

$$u|_{r=1} = \frac{1-s}{2} u_2 + \frac{1+s}{2} u_3.$$

Patrulaterul cu patru noduri este denumit element “liniar” (uneori biliniar) deoarece laturile sale rămân drepte după deformare. Aceasta asigură compatibilitatea între elemente, nu apar suprapuneri, goluri sau discontinuități. Patrulaterul izoparametric cu 4 noduri este un element *conform* (compatibil).

De asemenea, deoarece funcțiile de interpolare permit descrierea deplasărilor de corp rigid în sistemul de coordonate naturale, condițiile de deplasare ca un corp rigid și de deformății specifice constante sunt satisfăcute și în sistemul de coordonate carteziane.

Spre deosebire de elementul izoparametric, în general, patrulaterul cu 4 noduri este un element *neconform*. Dacă deplasarea u este aproximată sub forma

$$u(x, y) = b_1 + b_2 x + b_3 y + b_4 xy, \quad (9.9)$$

atunci în lungul fiecărei laturi aproximarea este de gradul doi.

De exemplu, ecuația laturii 2-3 (fig. 9.1, a) are forma $y = mx + c$, unde m este panta dreptei 2-3, astfel încât

$$u(x) \Big|_{2-3} = b_1 + cb_3 + (b_2 + mb_3 + cb_4)x + mb_4 x^2.$$

Pe latura 2-3, variația lui $u(x)$ este de gradul doi și nu poate fi definită univoc ca o funcție de u_2 și u_3 . Aproximarea (9.9) este *neconformă*.

9.1.4 Transformarea din coordonate naturale în carteziane

În continuare, este necesar ca derivatele în funcție de coordonatele $\{x, y\}$, care apar în matricea de rigiditate a elementului, să fie exprimate prin derivatele în funcție de coordonatele $\{r, s\}$, în care sunt definite funcțiile de formă. Pentru aceasta $f = f(x, y)$ este considerată o funcție implicită de r și s $f = f[x(r, s), y(r, s)]$.

Transformarea operatorilor diferențiali

Regula derivării funcțiilor de două variabile se scrie

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial s} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix}, \quad (9.10)$$

unde matricea jacobiană

$$[J] = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix}. \quad (9.11)$$

Utilizând (9.10) și (9.4), matricea jacobiană se poate exprima în funcție de coordonatele nodale

$$\begin{aligned}
 [J] &= \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial s} \end{Bmatrix} [x \quad y] = \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial s} \end{Bmatrix} \left[[N] \{x^e\} \quad [N] \{y^e\} \right] = \\
 &= \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} [N] \\ \frac{\partial}{\partial s} [N] \end{Bmatrix} \left[\{x^e\} \quad \{y^e\} \right].
 \end{aligned} \tag{9.12}$$

Pentru elementul patrulater cu patru noduri

$$[J] = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -(1-s) & (1-s) & (1+s) & -(1+s) \\ -(1-r) & -(1+r) & (1+r) & (1-r) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix}, \tag{9.13}$$

$$[J] = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + & -y_1 + y_2 + y_3 - y_4 + \\ +s(x_1 - x_2 + x_3 - x_4) & +s(y_1 - y_2 + y_3 - y_4) \\ -x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + & -y_1 - y_2 + y_3 + y_4 + \\ +r(x_1 - x_2 + x_3 - x_4) & +r(y_1 - y_2 + y_3 - y_4) \end{bmatrix}. \tag{9.13, a}$$

Relația inversă este

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial s}{\partial x} \\ \frac{\partial r}{\partial y} & \frac{\partial s}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial s} \end{Bmatrix} = [j] \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial s} \end{Bmatrix}, \tag{9.14}$$

unde $[j] = [J]^{-1}$ este inversa matricii jacobiene

$$[j] = \begin{bmatrix} j_{11} & j_{12} \\ j_{21} & j_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det[J]} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix}. \tag{9.15}$$

Pentru elementul patrulater cu 4 noduri

$$\det[J] = A_0 + A_1 r + A_2 s, \tag{9.16}$$

în care

$$A_0 = \frac{1}{8} [(y_4 - y_2)(x_3 - x_1) - (y_3 - y_1)(x_4 - x_2)],$$

$$A_1 = \frac{1}{8} [(y_3 - y_4)(x_2 - x_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_4)],$$

$$A_2 = \frac{1}{8} [(y_4 - y_1)(x_3 - x_2) - (y_3 - y_2)(x_4 - x_1)].$$

De obicei se utilizează matricea $[j]$ deoarece derivatele $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ trebuie exprimate în funcție de derivatele $\frac{\partial f}{\partial r}$, $\frac{\partial f}{\partial s}$, determinate pentru elementul de referință. Întrucât $r = r(x, y)$, $s = s(x, y)$ nu se cunosc explicit, este necesar $[j]$.

Expresiile de mai sus intervin în calculul matricii de rigiditate a unui element.

Transformarea unei arii infinit mici

În continuare se va mai folosi relația de transformare a ariilor

$$dx dy = \det [J] dr ds . \quad (9.17)$$

Aceasta este necesară deoarece, la evaluarea matricii de rigiditate a unui element, integrarea pe elementul real este înlocuită prin integrarea mai simplă pe elementul de referință.

În coordonate carteziene $\{x, y\}$, aria elementară dA este dată de valoarea absolută (modulul) a produsului vectorial $d\bar{x} \times d\bar{y}$, în care $d\bar{x} = dx \cdot \bar{i}$, $d\bar{y} = dy \cdot \bar{j}$, iar \bar{i} și \bar{j} sunt versori.

În coordonate curbilinii $\{r, s\}$, aria elementară dA este dată de valoarea absolută a produsului vectorial $d\bar{r} \times d\bar{s}$. Aceasta este egală cu aria paralelogramului elementar definit de cei doi vectori $d\bar{r}$ și $d\bar{s}$ dirijați în lungul tangențelor la liniile $r = \text{const.}$ și $s = \text{const.}$ Componentele acestor vectori într-un sistem de coordonate cartezian sunt

$$d\bar{r} = \frac{\partial x}{\partial r} dr \cdot \bar{i} + \frac{\partial y}{\partial r} dr \cdot \bar{j} = (J_{11} \bar{i} + J_{12} \bar{j}) dr, \quad d\bar{s} = (J_{21} \bar{i} + J_{22} \bar{j}) ds.$$

Egalând valorile absolute ale celor două produse vectoriale

$$d\bar{x} \times d\bar{y} = dx dy \cdot \bar{k},$$

$$d\bar{r} \times d\bar{s} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ J_{11} & J_{12} & 0 \\ J_{21} & J_{22} & 0 \end{vmatrix} dr ds = \det[J] dr ds \cdot \bar{k}$$

se obține relația (9.17).

9.1.5 Matricea de rigiditate a unui element

Matricea de rigiditate a unui element (7.43) este

$$[k^e] = t^e \int_A [B]^T [D] [B] dA, \quad (9.18)$$

unde $[D]$ este matricea de rigiditate a materialului și t^e este grosimea elementului.

Matricea derivatelor funcțiilor de formă $[B]$ este (7.41)

$$[B] = [\partial][N], \quad (9.19)$$

unde $[\partial]$ este matricea operatorilor de derivare (6.9) și $[N]$ este matricea funcțiilor de formă (9.7).

Înlocuind (6.9) în (7.41) rezultă

$$[B] = [\partial][N] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} [N]. \quad (9.20)$$

Utilizând transformarea (9.14) se obține

$$[B] = [B_1][B_2], \quad (9.21)$$

în care

$$[B_1] = \begin{bmatrix} j_{11} & j_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & j_{21} & j_{22} \\ j_{21} & j_{22} & j_{11} & j_{12} \end{bmatrix}, \quad (9.22)$$

și

$$[B_2] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial s} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial r} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial s} \end{bmatrix} [N], \quad (9.23)$$

sau

$$[B_2] = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -(1-s) & 0 & (1-s) & 0 & (1+s) & 0 & -(1+s) & 0 \\ -(1-r) & 0 & -(1+r) & 0 & (1+r) & 0 & (1-r) & 0 \\ 0 & -(1-s) & 0 & (1-s) & 0 & (1+s) & 0 & -(1+s) \\ 0 & -(1-r) & 0 & -(1+r) & 0 & (1+r) & 0 & (1-r) \end{bmatrix}.$$

Utilizând relația (9.17), matricea de rigiditate a unui element se poate scrie

$$[k^e] = t^e \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [B]^T [D] [B] \det [J] dr ds. \quad (9.24)$$

Deoarece $[B]$ și $\det [J]$ nu sunt funcții simple de r și s , integrala de mai sus trebuie rezolvată numeric, după cum se arată în continuare.

9.1.6 Vectorul forțelor nodale ale unui element

Deoarece deplasările punctelor de pe latura unui element izoparametric patrulater sunt liniare, forțele nodale coerente aplicate pe latura respectivă se calculează la fel ca pentru un element liniar cu două noduri.

Dacă pe latura 2-3 în fig. 9.1 acționează o sarcină distribuită având componentele (p_x, p_y) pe unitatea de lungime, atunci vectorul forțelor nodale echivalente este

$$\{f^e\} = \frac{1}{2} \ell_{2-3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & p_x & p_y & p_x & p_y & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \quad (9.25)$$

dacă p_x și p_y sunt constante și ℓ_{2-3} este lungimea laturii 2-3.

9.2 Integrarea numerică

Evaluarea numerică a integralei din matricile de rigiditate se face de obicei prin metoda Gauss, denumită și cuadratura Gauss. Aceasta este mai eficientă decât alte procedee, ca de exemplu integrarea Newton-Cotes, deoarece necesită doar jumătate din valorile eșantionate ale funcției utilizate de cea din urmă. La elementele de grad superior, integralele rigidității devin tot mai complicate. Pe măsura creșterii gradului câmpului de deplasări, derivatele funcțiilor de formă din matricea $[B]$ devin algebric mai complicate. În plus, transformarea de coordonate izoparametrică mai introduce și $\det [J]$ în integrand astfel că evaluarea sub formă închisă a integralelor rigidității devine imposibilă.

9.2.1 Integrarea Gauss unidimensională

Versiunea unidimensională a metodei Gauss se bazează pe faptul că orice funcție $f(r)$ poate fi reprezentată aproximativ pe intervalul $r \in [-1, 1]$ printr-un polinom care poate fi integrat exact. Un polinom de gradul $(2n-1)$ poate înlocui $f(r)$ impunând n ponderi w_i și n puncte de eșantionare astfel încât suma

$$\int_{-1}^{+1} f(r) dr = \sum_{i=1}^n w_i f(r_i) \quad (9.26)$$

să fie exactă până la gradul considerat.

Punctele în care valorile funcției și ale poligonului de aproximare coincid, se numesc *punctele Gauss*. Deoarece acestea sunt zerourile poligoanelor Legendre metoda se mai numește *integrarea Gauss-Legendre*.

Aria de sub curba $f(r)$ cuprinsă între punctele de abscise -1 și 1 este aproximată prin ariile unor suprafețe dreptunghiulare de lățimi neegale, ale căror înălțimi sunt egale cu valorile funcției în punctele de eșantionare. Cu alte cuvinte, integrala unei funcții polinomiale este înlocuită printr-o combinație liniară a valorilor acesteia în punctele de integrare r_i :

$$\int_{-1}^{+1} f(r) dr = w_1 f(r_1) + w_2 f(r_2) + \dots + w_i f(r_i) + \dots + w_n f(r_n). \quad (9.26, a)$$

Cei $2n$ coeficienți se determină din condiția ca relația de mai sus să fie satisfăcută de un polinom de gradul $2n-1$ de forma

$$f(r) = a_1 + a_2 r + a_3 r^2 + \dots + a_{2n} r^{2n-1}. \quad (9.27)$$

Înlocuind (9.27) în (9.26, a) rezultă

$$a_1 \int_{-1}^{+1} dr + a_2 \int_{-1}^{+1} r dr + \dots + a_{2n} \int_{-1}^{+1} r^{2n-1} dr = a_1 (w_1 + w_2 + \dots + w_n) + \quad (9.28)$$

$$+ a_2 (w_1 r_1 + w_2 r_2 + \dots + w_n r_n) + \dots + a_{2n} (w_1 r_1^{2n-1} + w_2 r_2^{2n-1} + \dots + w_n r_n^{2n-1}).$$

Identificând termenii se obține

$$\int_{-1}^{+1} dr = \sum_{i=1}^n w_i, \quad \int_{-1}^{+1} r dr = \sum_{i=1}^n w_i r_i, \quad \int_{-1}^{+1} r^\alpha dr = \sum_{i=1}^n w_i r_i^\alpha.$$

În general

$$\int_{-1}^{+1} r^\alpha dr = \begin{cases} 0 & \text{dacă } i \text{ este impar} \\ \frac{2}{\alpha+1} & \text{dacă } i \text{ este par} \end{cases} \quad (9.29)$$

astfel încât

$$\begin{aligned} 2 &= w_1 + w_2 + \dots + w_n, \\ 0 &= w_1 r_1 + w_2 r_2 + \dots + w_n r_n, \\ \frac{2}{3} &= w_1 r_1^2 + w_2 r_2^2 + \dots + w_n r_n^2, \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ 0 &= w_1 r_1^{2n-1} + w_2 r_2^{2n-1} + \dots + w_n r_n^{2n-1}. \end{aligned} \quad (9.30)$$

Acesta este un sistem de $2n$ ecuații, liniar în w_i și neliniar în r_i . Cei $2n$ parametri se determină din condițiile

$$\left. \begin{aligned} w_i &> 0 \\ -1 &< r_i < +1 \end{aligned} \right\} i = 1, 2, \dots, n.$$

Formula cu un punct de integrare

Pentru $n = 1$ se utilizează regula *punctului median* (fig. 9.3, a)

$$\int_{-1}^{+1} f(r) dr \approx w_1 f(r_1)$$

care este exactă doar când $f(r)$ este un polinom de gradul întâi. Totuși, aceasta este utilizată uneori la *integrarea selectivă*, de exemplu la separarea forfecării de încovoiere, pentru evitarea așa-numitului fenomen de “blocaj la forfecare” (*shear locking*) prin folosirea integrării reduse pentru forfecare.

Formula cu două puncte

La integrarea în două puncte

$$\int_{-1}^{+1} f(r) dr = w_1 f(r_1) + w_2 f(r_2). \quad (9.31)$$

Pentru un polinom de gradul $2n-1 = 2 \cdot 2 - 1 = 3$, relațiile (9.30) devin

$$\begin{aligned} 2 &= w_1 + w_2, \\ 0 &= w_1 r_1 + w_2 r_2, \\ \frac{2}{3} &= w_1 r_1^2 + w_2 r_2^2, \\ 0 &= w_1 r_1^3 + w_2 r_2^3. \end{aligned}$$

Soluțiile acestui sistem de ecuații sunt

$$w_1 = w_2 = 1, \quad r_1 = -r_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0,5773502691$$

astfel încât (fig. 9.3, b)

$$\int_{-1}^{+1} f(r) dr = 1 \cdot f(0,57735) + 1 \cdot f(-0,57735).$$

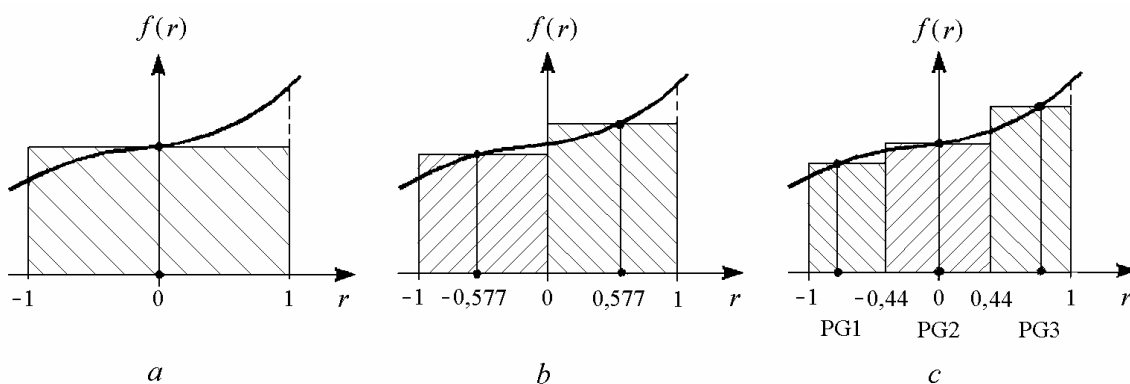


Fig. 9.3

Formula cu trei puncte

La integrarea în trei puncte (fig. 9.3, c)

$$\sum_{i=1}^3 w_i f(r_i) = 0,555 \cdot f(-0,774) + 0,888 \cdot f(0) + 0,555 \cdot f(0,774).$$

Abscisele punctelor Gauss și ponderile sunt date în Tabelul 9.1.

Tabelul 9.1

Numărul punctelor Gauss	Gradul polinomului integrat exact	Punctele Gauss, r_i	Ponderile, w_i
1	1	0	2,0
2	3	$\pm 0,57735$	1,0
3	5	0 $\pm 0,774596$	0,8888 0,5555
4	7	$\pm 0,339981$ $\pm 0,861136$	0,652145 0,347854

9.2.2 Integrarea Gauss în două dimensiuni

Integrarea Gauss unidimensională poate fi extinsă ușor la două dimensiuni dacă se folosesc dreptunghiurile sau patrulaterele izoparametrice din § 9.1:

$$I = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(r,s) dr ds \cong \int_{-1}^{+1} \left[\sum_{j=1}^n w_j f(r, s_j) \right] dr = \sum_{i=1}^n w_i \sum_{j=1}^n w_j f(r_i, s_j),$$

$$I = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(r,s) dr ds = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j f(r_i, s_j). \quad (9.32)$$

Pentru $n = 2$

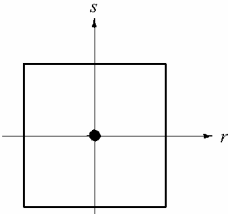
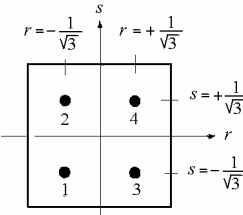
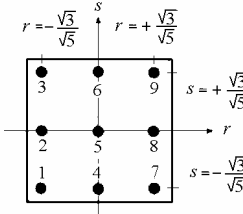
$$w_1 = w_2 = 1, \quad r_1 = s_1 = -0,57735, \quad r_2 = s_2 = 0,57735,$$

astfel încât

$$I = f(r_1, s_1) + f(r_1, s_2) + f(r_2, s_1) + f(r_2, s_2).$$

Formulele de integrare Gauss pentru elemente patrulatere sunt date în Tabelul. 9.2.

Tabelul 9.2

n	Numărul punctelor Gauss $n \times n$	Punctele Gauss, r_i, s_j	Ponderile, w_i, w_j
1	1 (1×1)		4 (= 2 × 2) în centru
2	4 (2×2)		1 (= 1 × 1) în punctele 1, 2, 3, 4
3	9 (3×3)		$\frac{25}{81} \left(= \frac{5}{9} \times \frac{5}{9} \right)$ în punctele 1, 3, 7, 9 $\frac{40}{81} \left(= \frac{5}{9} \times \frac{8}{9} \right)$ în punctele 2, 4, 6, 8 $\frac{64}{81} \left(= \frac{8}{9} \times \frac{8}{9} \right)$ în punctul 5

9.2.3 Integrala din matricea de rigiditate

Matricea de rigiditate a unui element (9.24) este

$$[k^e] = t^e \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [D] [B] \det [J] dr ds$$

ceea ce arată că expresia de mai sus implică integrarea fiecărui element (situat pe, sub sau deasupra diagonalei principale) al unei matrici de dimensiuni (8×8).

În general, $\det [J]$ este o funcție liniară de r și s . Pentru dreptunghi sau paralelogram aceasta este o constantă. Elementele matricii $[B]$ se obțin împărțind o funcție biliniară de r și s la o funcție liniară. Prin urmare, elementele produsului matricial $[B]^T [D] [B] \det [J]$ sunt funcții bipătratice împărțite la o

funcție liniară. Rezultă că matricea $[k^e]$ nu poate fi evaluată exact prin integrare numerică.

Din considerații practice, este preferabil să se utilizeze cât mai puține puncte de integrare fără a produce dificultăți numerice. O alternativă este folosirea *integrării reduse* într-un număr de puncte mai mic decât cel necesar, pentru a micșora rigiditatea și a compensa astfel rigiditatea inerent sporită a modelului cu elemente finite. Această soluție este și mai ieftină.

O limită inferioară a numărului de puncte de integrare se poate obține observând că pe măsură ce discretizarea este mai fină, se tinde spre starea de deformații specifice constante. În acest caz, matricea de rigiditate (9.24) devine

$$[k^e] \approx [B]^T [D][B] \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} t^e \det [J] dr ds. \quad (9.33)$$

Integrala din (9.33) reprezintă volumul elementului. Prin urmare, numărul minim al punctelor de integrare este numărul necesar pentru a evalua exact volumul elementului. Considerând grosimea t^e constantă și observând că $\det [J]$ este liniară, rezultă că volumul poate fi evaluat exact utilizând un singur punct de integrare.

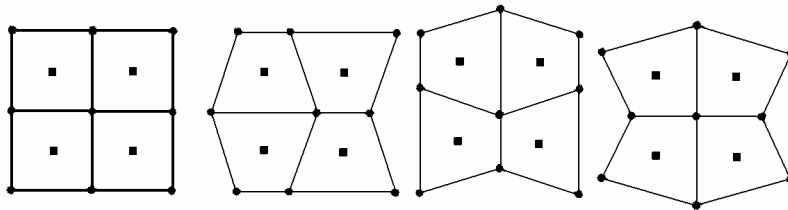


Fig. 9.4

Cu toate acestea, în cazul de față, un singur punct de integrare este inacceptabil deoarece produce moduri de deformare cu energie de deformație nulă (fig. 9.4). Acestea apar dacă în unul din aceste moduri deformațiile specifice sunt zero în punctul de integrare. Existența acestor moduri este indicată de faptul că matricea de rigiditate are mai multe valori proprii nule decât numărul modurilor de corp rigid.

Experiența a arătat că ordinul de integrare optim pentru elementul patrulater cu 4 noduri este cu 4 puncte Gauss.

Utilizând schema cu 4 puncte Gauss (9.33), se poate scrie

$$\begin{aligned}
[k^e] \cong & t^e [B(r_1, s_1)]^T [[D] \det [J(r_1, s_1)]] [B(r_1, s_1)] + \\
& + t^e [B(r_1, s_2)]^T [[D] \det [J(r_1, s_2)]] [B(r_1, s_2)] + \\
& + t^e [B(r_2, s_1)]^T [[D] \det [J(r_2, s_1)]] [B(r_2, s_1)] + \\
& + t^e [B(r_2, s_2)]^T [[D] \det [J(r_2, s_2)]] [B(r_2, s_2)].
\end{aligned} \quad (9.34)$$

Calculul se face în patru etape de bază:

a) Determinarea matricii $[J]$ în punctele Gauss (9.11)

$$[J(r_i, s_j)] = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -(1-s_j) & (1-s_j) & (1+s_j) & -(1+s_j) \\ -(1-r_i) & -(1+r_i) & (1+r_i) & (1-r_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix}$$

și a determinantului acesteia.

b) Calculul matricii inverse $[j] = [J]^{-1}$ în punctele Gauss.

c) Calculul matricii $[B]$ din relația (9.21)

$$[B] = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} j_{11} & j_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & j_{21} & j_{22} \\ j_{21} & j_{22} & j_{11} & j_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -(1-s_j) & 0 & 1-s_j & 0 & 1+s_j & 0 & -(1+s_j) & 0 \\ -(1-r_i) & 0 & -(1+r_i) & 0 & 1+r_i & 0 & 1-r_i & 0 \\ 0 & -(1-s_j) & 0 & 1-s_j & 0 & 1+s_j & 0 & -(1+s_j) \\ 0 & -(1-r_i) & 0 & -(1+r_i) & 0 & 1+r_i & 0 & 1-r_i \end{bmatrix}.$$

d) Calculul matricii de rigiditate $[k^e]$ utilizând patru puncte Gauss (9.34).

Exemplul 9.1

Fie elementul patrulater din fig. 9.1 cu următoarele coordonate nodale

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 10 \\ 20 & 15 \\ 25 & 30 \\ 8 & 25 \end{bmatrix}.$$

Pentru simplificarea calculului se consideră punctele Gauss aproximativ la $r_i, s_j = \pm 0,5$ în loc de $r_i, s_j = \pm 0,57735$. Pentru primul termen din expresia (9.34) trebuie calculate $\det [J]$ și $[B]$ în PG1.

În punctul Gauss 1 (PG1), matricea jacobiană (9.11) este

$$[J] = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -0,5 & 0,5 & 1,5 & -1,5 \\ -0,5 & -1,5 & 1,5 & 0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 10 \\ 20 & 15 \\ 25 & 30 \\ 8 & 25 \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 61 & 20 \\ 13 & 60 \end{bmatrix}.$$

Determinantul și inversa acesteia sunt

$$\det [J] = 53,125, \quad [j] = [J]^{-1} = \frac{1}{425} \begin{bmatrix} 60 & -20 \\ -13 & 61 \end{bmatrix}.$$

În PG1, matricea $[B]$ este dată de (9.21)

$$[B] = \frac{1}{1700} \begin{bmatrix} 60 & -20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -13 & 61 \\ -13 & 61 & 60 & -20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,5 & 0 & 0,5 & 0 & 1,5 & 0 & -1,5 & 0 \\ -0,5 & 0 & -1,5 & 0 & 1,5 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & -0,5 & 0 & 0,5 & 0 & 1,5 & 0 & -1,5 \\ 0 & -0,5 & 0 & -1,5 & 0 & 1,5 & 0 & 0,5 \end{bmatrix},$$

$$[B] = \frac{1}{850} \begin{bmatrix} -10 & 0 & 30 & 0 & 30 & 0 & -50 & 0 \\ 0 & -12 & 0 & -49 & 0 & 36 & 0 & 25 \\ -12 & 10 & -49 & 30 & 36 & 30 & 25 & -50 \end{bmatrix}.$$

9.2.4 Calculul tensiunilor

La elementul patrulater, tensiunile

$$\{\sigma\} = [D][B]\{q^e\} \quad (9.35)$$

variază în interiorul elementului.

În practică, tensiunile sunt calculate în punctele Gauss, unde s-a constatat că au valori foarte apropiate de cele exacte (Barlow, 1976). În unele programe, tensiunile calculate în punctele Gauss sunt extrapolate la nodurile elementului, iar când într-un nod se întâlnesc mai multe elemente se afișează media tensiunilor calculate pentru fiecare element.

Tensiunile maxime apar de obicei la marginile plăcilor sau la discontinuități de la periferia elementelor. Pentru a nu omite aceste vârfuri de tensiune, se recomandă o discretizare mai fină în zonele cu concentratori de tensiuni. Cu toate acestea, valorile din punctele Gauss sunt ideale pentru construcția diagramelor de variație a tensiunilor în interiorul corpurilor, fie pe o direcție dată, fie ca linii (contururi) de valori constante ale tensiunilor.

9.3 Elementul patrulater cu opt noduri

Acest element este versiunea izoparametrică a dreptunghiului cu opt noduri prezentat în paragraful 8.2.2. Diferența constă în faptul că în coordonate carteziene acesta are laturi curbe (fig. 9.5, *a*) iar elementul master este un pătrat (fig. 9.5, *b*).

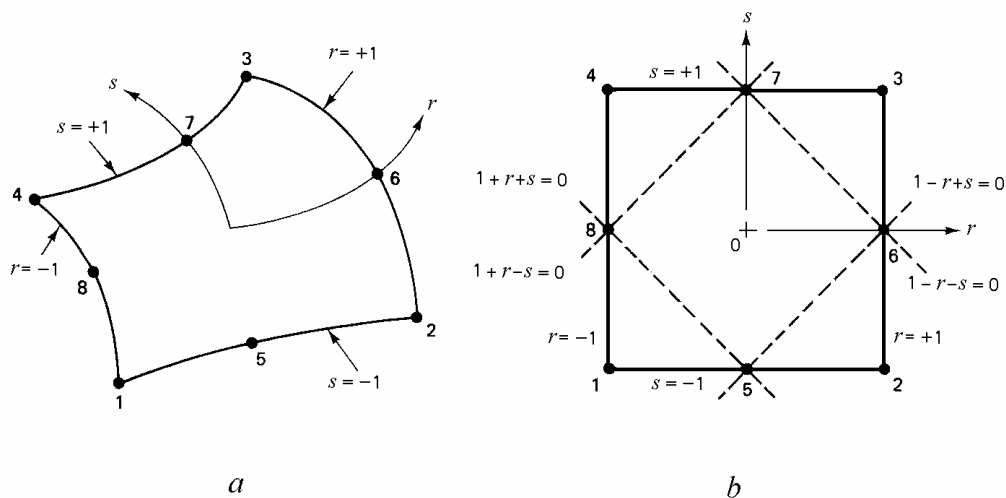


Fig. 9.5

Funcțiile de aproximare a deplasărilor în formă polinomială (8.27) sunt

$$\begin{aligned} u &= a_1 + a_2 r + a_3 s + a_4 r^2 + a_5 r s + a_6 s^2 + a_7 r^2 s + a_8 r s^2, \\ v &= b_1 + b_2 r + b_3 s + b_4 r^2 + b_5 r s + b_6 s^2 + b_7 r^2 s + b_8 r s^2. \end{aligned} \quad (9.36)$$

Elementul are trei noduri pe latură, deci variația deplasărilor trebuie să fie parabolică (trei constante) pentru a satisface compatibilitatea.

La patrulaterul cu opt noduri, componentele câmpului de deplasări și tensiunile sunt de gradul doi în r și s . Produsul $[B]^T [D] [B]$ este deci de gradul patru iar $\det [J]$ este cubic. S-ar părea că pentru calculul exact al matricii de rigiditate trebuie utilizată integrarea Gauss în 3×3 puncte.

S-a arătat că, pentru evaluarea ordinului de integrare minim, este suficientă examinarea determinantului jacobian. La elementul pătratic cu 8 noduri, $\det [J]$ este de gradul trei, deci numărul minim al punctelor de integrare este 4 (2×2).

Pentru un singur element dreptunghiular cu 8 noduri, chiar dacă este rezemat convențional, utilizarea integrării în 2×2 puncte Gauss ar conduce la o matrice de rigiditate singulară. În practică, grupuri mai mari de elemente nu suferă

de astfel de mecanisme, astfel că în mod normal este folosită integrarea în 2×2 puncte. Punctele de eșantionare optime pentru acest element sunt punctele Gauss pentru integrarea în 2×2 puncte și nu cele pentru integrarea în 3×3 puncte, astfel că se adaugă avantajele integrării reduse.

Pentru un element *patrulater* cu 8 noduri, valori mai precise ale deplasărilor se obțin totuși folosind o rețea de 3×3 puncte Gauss.

Patrulaterul cu laturi curbe și 8 noduri este ideal pentru probleme neliniare și poate fi adaptat ușor pentru modelarea fisurilor, prin deplasarea spre colțuri a nodurilor de la mijlocul laturilor. Trebuie lucrat însă cu atenție, deoarece distorsionarea excesivă a formei elementului duce la scăderea preciziei de calcul.

9.3.1 Funcțiile de formă

Funcțiile de formă (8.29) au următoarele expresii

$$\begin{aligned} N_1 &= -\frac{1}{4}(1-r)(1-s)(1+r+s), & N_5 &= \frac{1}{2}(1-r^2)(1-s), \\ N_2 &= -\frac{1}{4}(1+r)(1-s)(1-r+s), & N_6 &= \frac{1}{2}(1+r)(1-s^2), \\ N_3 &= -\frac{1}{4}(1+r)(1+s)(1-r-s), & N_7 &= \frac{1}{2}(1-r^2)(1+s), \\ N_4 &= -\frac{1}{4}(1-r)(1+s)(1+r-s), & N_8 &= \frac{1}{2}(1-r)(1-s^2). \end{aligned} \quad (9.37)$$

Fiind construite pe baza ecuațiilor liniilor care trec prin punctele nodale, ele aparțin familiei de elemente *serendipity* *).

În programare, se pot folosi următoarele formule echivalente în care (r_i, s_i) sunt coordonatele naturale ale nodului i :

pentru nodurile de la colțuri

$$\begin{aligned} N_i &= \frac{1}{4}(1+r r_i)(1+s s_i)(r r_i + s s_i - 1), \\ \frac{\partial N_i}{\partial r} &= \frac{r_i}{4}(1+s s_i)(2r r_i + s s_i), & \frac{\partial N_i}{\partial s} &= \frac{s_i}{4}(1+r r_i)(2s s_i + r r_i); \end{aligned} \quad (9.38)$$

*) Denumite astfel după ușurința de a face descoperiri a prinților Serendip din romanele lui Horace Walpole (1717-1797).

Pentru nodurile de la mijlocul laturii, când $r_i = 0$

$$N_i = \frac{1}{2}(1-r^2)(1+s s_i),$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial r} = -r(1+s s_i), \quad \frac{\partial N_i}{\partial s} = \frac{1}{2}s_i(1-r^2); \quad (9.39)$$

pentru nodurile de la mijlocul laturii, când $s_i = 0$

$$N_i = \frac{1}{2}(1-s^2)(1+r r_i),$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial r} = \frac{1}{2}r_i(1-s^2), \quad \frac{\partial N_i}{\partial s} = -s(1+r r_i). \quad (9.40)$$

Deplasările în interiorul elementului pot fi exprimate în funcție de deplasările nodale sub forma

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = [N] \{q^e\}, \quad (9.41)$$

unde

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & \dots & \dots & N_8 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & \dots & \dots & 0 & N_8 \end{bmatrix}, \quad (9.42)$$

$$\{q^e\} = [u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad \dots \quad \dots \quad u_8 \quad v_8]^T. \quad (9.43)$$

Odată generate funcțiile de formă $[N]$, matricea $[B] = [\partial][N]$ este

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \dots & \frac{\partial N_8}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \dots & 0 & \frac{\partial N_8}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_8}{\partial y} & \frac{\partial N_8}{\partial x} \end{bmatrix}. \quad (9.44)$$

9.3.2 Derivatele funcțiilor de formă

Utilizarea formulării izoparametrice

$$x = \sum_{i=1}^8 N_i(r,s) x_i, \quad y = \sum_{i=1}^8 N_i(r,s) y_i \quad (9.45)$$

conduce la

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial r} \\ \frac{\partial N_i}{\partial s} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\det [J]} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial s} & -\frac{\partial y}{\partial r} \\ -\frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial r} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial r} \\ \frac{\partial N_i}{\partial s} \end{Bmatrix}, \quad (9.46)$$

în care

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial r} &= \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i(r,s)}{\partial r} x_i, & \frac{\partial x}{\partial s} &= \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i(r,s)}{\partial s} x_i, \\ \frac{\partial y}{\partial r} &= \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i(r,s)}{\partial r} y_i, & \frac{\partial y}{\partial s} &= \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i(r,s)}{\partial s} y_i. \end{aligned} \quad (9.47)$$

9.3.3 Determinantul matricii jacobiene

Matricea jacobiană este

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix}, \quad (9.48)$$

iar determinantul acesteia este

$$\det [J] = \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial y}{\partial s} - \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial y}{\partial r}. \quad (9.49)$$

9.3.4 Matricea de rigiditate a unui element

Matricea de rigiditate a elementului este

$$[k^e] = t^e \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [B]^T [D] [B] \det [J] dr ds \quad (9.50)$$

unde t^e este grosimea plăcii iar matricea de rigiditate a materialului $[D]$ are forma

$$[D] = \begin{bmatrix} D_1 & D_2 & 0 \\ D_2 & D_4 & 0 \\ 0 & 0 & D_5 \end{bmatrix}. \quad (9.51)$$

Înlocuind (9.44), matricea de rigiditate (9.50) poate fi scrisă

$$[k^e] = t^e \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} \\ \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial N_8}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_8}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial N_8}{\partial y} & \frac{\partial N_8}{\partial x} \end{bmatrix}^T [D] \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \dots & \frac{\partial N_8}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \dots & 0 & \frac{\partial N_8}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_8}{\partial y} & \frac{\partial N_8}{\partial x} \end{bmatrix} \det [J] dr ds . \quad (9.52)$$

Matricea de rigiditate a elementului, de dimensiuni (16×16) , conține submatricile $[k]_{ij}$ care, evaluate prin integrare numerică, au forma

$$[k]_{ij} = t^e \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n w_p w_q \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} [D] \begin{bmatrix} \frac{\partial N_j}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_j}{\partial y} \\ \frac{\partial N_j}{\partial y} & \frac{\partial N_j}{\partial x} \end{bmatrix} \det [J], \quad (9.53)$$

$$\text{sau} \quad [k]_{ij} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ k_3 & k_4 \end{bmatrix}_{ij}. \quad (9.53, a)$$

Notând

$$w = t^e w_p w_q \det [J], \quad (9.54)$$

elementele matricii (9.53, a) pot fi calculate cu relațiile

$$\begin{aligned} k_{1ij} &= \sum \sum w \left(D_1 \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + D_5 \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right), \\ k_{2ij} &= \sum \sum w \left(D_2 \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial y} + D_5 \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial x} \right), \\ k_{3ij} &= \sum \sum w \left(D_2 \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial x} + D_5 \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right), \end{aligned} \quad (9.55)$$

$$k_{4_{ij}} = \sum \sum w \left(D_4 \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} + D_5 \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} \right).$$

Pentru $i = j$, $k_2 = k_3$.

O examinare a relațiilor (9.55) arată că toți termenii au forma
(constantă) \times (proprietate de material) \times (produs al derivatelor funcțiilor de formă).

Prin urmare, dacă proprietățile materialului sunt constante în tot elementul, este util să se memoreze separat într-o matrice $[S]_{ij}$ sumele produselor derivatelor funcțiilor de formă înmulțite cu w , sub forma

$$[S]_{ij} = \begin{bmatrix} \sum \sum w \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} & \sum \sum w \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial y} \\ \sum \sum w \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial x} & \sum \sum w \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (9.56)$$

și apoi să se calculeze expresiile (9.55) introducând constantele de material relevante.

Această metodă (K. A. Gupta & B. Mohraz, 1972) reduce timpul de calcul de nouă ori față de metoda înmulțirii întregii matrici

9.3.5 Calculul tensiunilor

Vectorul tensiunilor unui element este

$$\{\sigma\} = [D][B]\{q^e\}. \quad (9.57)$$

La elementul pătratic cu 8 noduri forma explicită a relației (9.57) este

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1 & D_2 & 0 \\ D_2 & D_4 & 0 \\ 0 & 0 & D_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \dots & \frac{\partial N_8}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \dots & 0 & \frac{\partial N_8}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_8}{\partial y} & \frac{\partial N_8}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ \dots \\ v_8 \end{Bmatrix}$$

de unde rezultă

$$\sigma_x = D_1 \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial x} u_i + D_2 \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial y} v_i,$$

$$\sigma_y = D_2 \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial x} u_i + D_4 \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial y} v_i, \quad (9.58)$$

$$\tau_{xy} = D_5 \sum_{i=1}^8 \left(\frac{\partial N_i}{\partial y} u_i + \frac{\partial N_i}{\partial x} v_i \right),$$

În unele programe tensiunile se determină la noduri, deoarece se cunosc coordonatele acestora și este convenabil să se calculeze deplasările și tensiunile în aceleași puncte. S-a constatat însă că la un element pătratic cu 8 noduri valorile tensiunilor la noduri sunt incorecte. Totuși, rezultate mai apropiate de valoarea adevărată se pot obține dacă în fiecare nod se calculează media valorilor tensiunilor din toate elementele care au acel nod comun.

O soluție mai bună este calculul tensiunilor în punctele Gauss, prin care se obține o precizie sporită și nu mai este necesar calculul tensiunilor medii. Aceasta se explică prin faptul că rigiditatea elementului se calculează prin eșantionarea integrandului în punctele Gauss, deci este de așteptat ca valorile cele mai precise ale tensiunilor și deformațiilor specifice să apară în aceste puncte.

9.3.6 Forțele nodale coerente

Spre deosebire de elementele triunghiulare, în care toate sarcinile se pot reduce la noduri intuitiv sau bazat pe statică, la elementul izoparametric pătratic forțele nodale datorite sarcinilor distribuite trebuie calculate conform relației (7.44)

$$\{f^e\} = \int_{V^e} [N]^T \{p\} dV. \quad (9.59)$$

Forțele nodale echivalente se adaugă, element cu element, în vectorul global al forțelor, care reprezintă membrul drept al sistemului de ecuații liniare ce trebuie rezolvate în funcție de deplasări.

Presiune pe laturi

În calculul vectorilor forțelor nodale, distribuția reală de presiune pe latura unui element este înlocuită printr-o distribuție parabolică, definită prin valorile presiunii la cele trei noduri de pe latura respectivă. Toate valorile intermediare se pot calcula cu ajutorul funcțiilor de formă. De obicei în calcul se utilizează toate nodurile elementului, astfel că nu este necesar să se considere separat funcțiile de formă corespunzătoare celor trei noduri cu valori impuse ale presiunii.

Fie o sarcină distribuită p , dată în unități de forță pe unitatea de lungime, aplicată pe latura $s = +1$ a unui element. Componentele forței $p dr$ care acționează pe o lungime infinit mică dr sunt

$$\begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \end{Bmatrix} = p \begin{Bmatrix} \frac{\partial y}{\partial r} \\ -\frac{\partial x}{\partial r} \end{Bmatrix} dr. \quad (9.60)$$

Forța coerentă cu p este dată de o formă modificată a relației (9.59) în care integrala pe volum este redusă la o integrală pe o linie

$$\{f^e\} = \int_{-1}^{+1} p [N]^T \begin{Bmatrix} \frac{\partial y}{\partial r} \\ -\frac{\partial x}{\partial r} \end{Bmatrix} dr, \quad (9.61)$$

unde $[N]$ este dată de (9.42).

Vectorul (9.61) este calculat de obicei prin integrare numerică și scris sub forma

$$\{f^e\} = \sum_{i=1}^n w_i [N]^T p_i \begin{Bmatrix} \frac{\partial y}{\partial r} \\ -\frac{\partial x}{\partial r} \end{Bmatrix}_i \quad (9.62)$$

unde p_i este presiunea în punctul Gauss i pe latura $s = +1$ calculată cu relația

$$p = \sum_{k=1}^8 N_k(r, s) p_k. \quad (9.63)$$

Dacă aceeași presiune acționează pe latura $s = -1$, atunci vectorul forță $\{f^e\}$ are semn schimbat, deoarece presiunea este considerată pozitivă când acționează spre centrul elementului. O relație aplicabilă ambelor laturi $s = \pm 1$ este

$$\{f^e\} = \sum_{i=1}^n w_i w_s [N]^T \left(\sum_{k=1}^8 N_k p_k \right) \begin{Bmatrix} \frac{\partial y}{\partial r} \\ -\frac{\partial x}{\partial r} \end{Bmatrix}_i, \quad (9.64)$$

în care w_s are valoarea coordonatei s de pe latura încărcată.

O expresie similară pentru încărcări pe laturile $r = \pm 1$ este

$$\{f^e\} = \sum_{i=1}^n w_i w_r [N]^T \left(\sum_{k=1}^8 N_k p_k \right) \begin{Bmatrix} -\frac{\partial y}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial s} \end{Bmatrix}_i. \quad (9.65)$$

La un element izoparametric dreptunghiular, cu laturi paralele cu axele x, y , expresiile forțelor nodale echivalente pot fi integrate explicit.

Exemplul 9.2

La elementul din figura E9.2, a , încărcat cu o presiune uniform distribuită pe latura superioară, se cer forțele nodale echivalente.

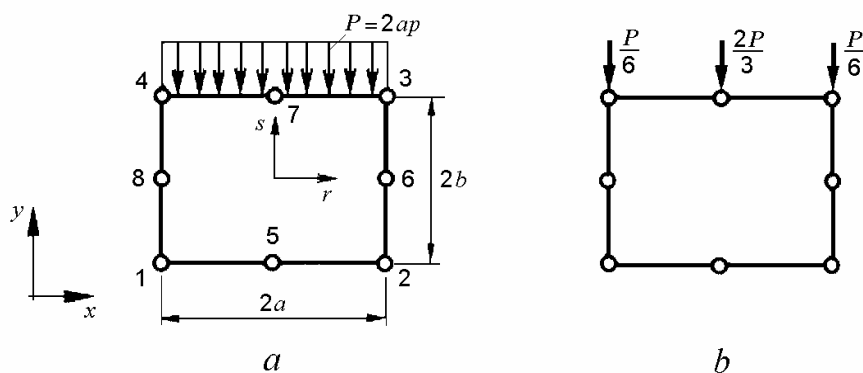


Fig. E9.2

Rezolvare.

Pe latura $s = +1$ funcțiile de formă au valori nule $N_1 = N_5 = N_2 = N_6 = N_8 = 0$.

La elementul dreptunghiular $\frac{\partial y}{\partial r} = 0$ și $\frac{\partial x}{\partial r} = a$. Expresia (9.61) se scrie

$$\{f^e\} = \begin{Bmatrix} f_{y3} \\ f_{y7} \\ f_{y4} \end{Bmatrix} = \int_{-1}^{+1} p \begin{Bmatrix} N_3 \\ N_7 \\ N_4 \end{Bmatrix} (-a) dr. \quad (9.66)$$

Dacă forța totală produsă de presiune se notează $P = 2pa$, componentele forțelor nodale se pot scrie sub forma

$$f_{y3} = -\frac{P}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{1}{4} (1 + r r_i) (1 + s s_i) (r r_i + s s_i - 1) dr,$$

$$f_{y7} = -\frac{P}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{1}{4} (1 + s s_i) (1 - r^2) dr,$$

$$f_{y4} = -\frac{P}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{1}{4} (1+r r_i)(1+s s_i)(r r_i + s s_i - 1) dr .$$

Înlocuind în expresiile de mai sus $r_i = 1$ și $s_i = 1$ pentru nodul 3, $r_i = 0$ și $s_i = 1$ pentru nodul 7, $r_i = -1$ și $s_i = 1$ pentru nodul 4, se obține

$$f_{y3} = -\frac{P}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{1}{4} (1+r)(2)(r+1-1) dr = -\frac{P}{6} ,$$

$$f_{y7} = -\frac{P}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{1}{4} (2)(1-r^2) dr = -\frac{2P}{3} ,$$

$$f_{y4} = -\frac{P}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{1}{4} (1-r)(2)(-r+1-1) dr = -\frac{P}{6} .$$

Rezultă că o sarcină uniform repartizată pe o latură nu este înlocuită prin forțe distribuite în rapoartele intuitive de $\frac{1}{4} : \frac{1}{2} : \frac{1}{4}$, ci în proporțiile $\frac{1}{6} : \frac{2}{3} : \frac{1}{6}$ (fig. E9.2, b).

Același rezultat putea fi obținut observând că integranzii din relațiile de mai sus sunt funcțiile de formă ale elementului unidimensional izoparametric cu trei noduri (4.26).

Încărcare gravitațională

În cazul încărcării prin greutatea proprie (negativă în jos) vectorul forțelor nodale echivalente (9.59) este

$$\{f^e\} = \int m [N]^T \begin{Bmatrix} 0 \\ -g \end{Bmatrix} dx dy = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} m [N]^T \begin{Bmatrix} 0 \\ -g \end{Bmatrix} \det [J] dr ds , \quad (9.67)$$

unde m este masa pe unitatea de suprafață și g este accelerația în direcția y .

Integrarea se face numeric și relația (9.67) devine

$$\{f^e\} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j m [N]^T \begin{Bmatrix} 0 \\ -g \end{Bmatrix} \det [J]. \quad (9.68)$$

Exemplul 9.3

Se consideră elementul dreptunghiular din figura E9.3, a cu încărcare gravitațională. Se cer forțele nodale echivalente.

Rezolvare. Deoarece toate forțele nodale echivalente acționează în direcția y ,

$$\begin{Bmatrix} f_{y1} \\ f_{y2} \\ \dots \\ f_{y8} \end{Bmatrix} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} m g \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ \dots \\ N_8 \end{Bmatrix} \det [J] dr ds . \quad (9.69)$$

La un element dreptunghiular $\det [J] = ab$.

Pentru un nod de colț i , integrala devine

$$f_{yi} = - \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} m g \frac{1}{4} (1 + r r_i) (1 + s s_i) (r r_i + s s_i - 1) \det [J] dr ds . \quad (9.70)$$

Dacă greutatea totală a elementului se notează $W = mg \cdot 2a \cdot 2b$, atunci expresia forței (9.70) poate fi scrisă

$$f_{yi} = - \frac{W}{16} (I_1 + I_2 + I_3) , \quad (9.71)$$

în care

$$I_1 = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} (1 + r r_i) (1 + s s_i) r r_i dr ds = \frac{4}{3} \quad (9.72)$$

deoarece $r_i = \pm 1$ la toate nodurile din colțuri,

$$I_2 = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} (1 + r r_i) (1 + s s_i) s s_i dr ds = \frac{4}{3} \quad (9.73)$$

fiindcă $s_i = \pm 1$ la toate nodurile din colțuri, și

$$I_3 = - \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} (1 + r r_i) (1 + s s_i) dr ds = -4 . \quad (9.74)$$

Prin urmare, la un nod de colț i , forțele nodale echivalente încărcării prin greutatea proprie sunt date de

$$f_{yi} = - \frac{W}{16} (I_1 + I_2 + I_3) = - \frac{W}{16} \left(\frac{4}{3} + \frac{4}{3} - 4 \right) = \frac{W}{12} . \quad (9.75)$$

Pentru un nod i de la mijlocul unei laturi cu $r_i = 0$, integrala este

$$f_{yi} = - \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} m g \frac{1}{2} (1 - r^2) (1 + s s_i) \det [J] dr ds = - \frac{W}{3} . \quad (9.76)$$

Pentru un nod i de la mijlocul unei laturi cu $s_i = 0$, integrala este

$$f_{yi} = - \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} m g \frac{1}{2} (1 - s^2) (1 + r r_i) \det [J] dr ds = - \frac{W}{3} . \quad (9.77)$$

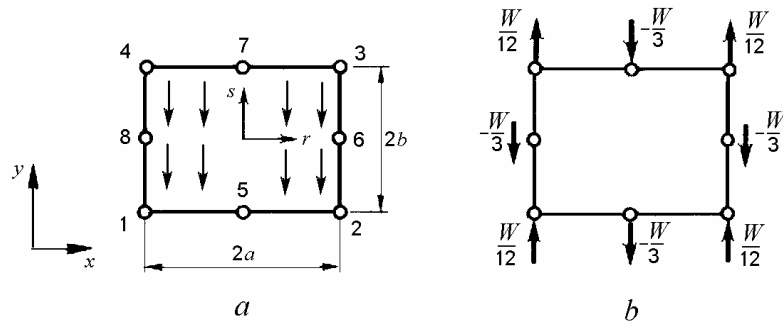


Fig. E9.3

Forțele nodale echivalente încărcării prin greutatea proprie sunt prezentate în figura E9.3, *b*. De remarcat că acestea diferă de valorile $-W/12$ și $-W/6$, care ar fi fost atribuite intuitiv nodurilor din colțuri și de la mijlocul laturilor.

9.4 Elementul patrulater cu nouă noduri

Patrulaterul cu 9 noduri aparține familiei de elemente *Lagrange*. În afara celor opt noduri de pe laturi, acesta conține un nod interior. Numerotarea locală a nodurilor este prezentată în figura 9.6, *a*. Elementul de referință este arătat în figura 9.6, *b*.

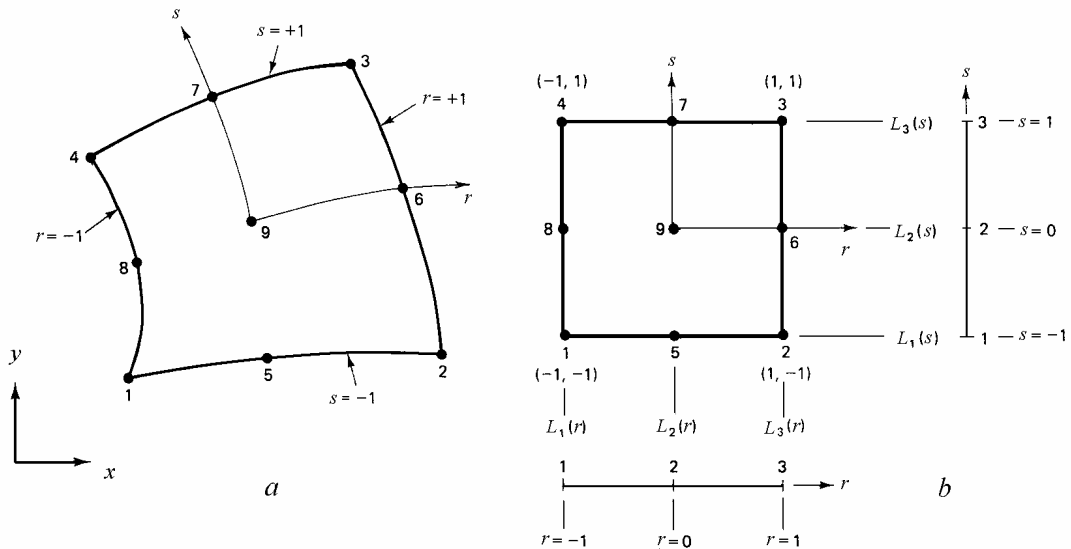


Fig. 9.6

Funcțiile de aproximare a deplasărilor în formă polinomială sunt

$$\begin{aligned} u &= a_1 + a_2 r + a_3 s + a_4 r^2 + a_5 r s + a_6 s^2 + a_7 r^2 s + a_8 r s^2 + a_9 r^2 s^2, \\ v &= b_1 + b_2 r + b_3 s + b_4 r^2 + b_5 r s + b_6 s^2 + b_7 r^2 s + b_8 r s^2 + b_9 r^2 s^2. \end{aligned} \quad (9.78)$$

În lungul laturilor elementului, polinomul este de gradul doi (cu trei termeni – după cum se poate vedea înlocuind $s=0$ în u), și este determinat de valorile în cele trei noduri de pe latura respectivă.

Elemente dreptunghiulare de ordin superior pot fi dezvoltate sistematic cu ajutorul *triunghiului lui Pascal*, care conține termenii polinoamelor de diferite grade în cele două variabile r și s , după cum se arată în figura 9.7.

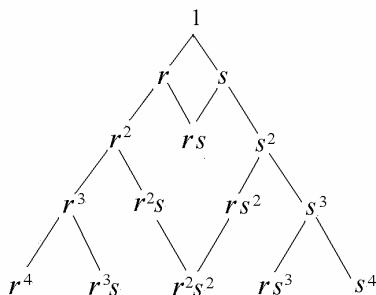


Fig. 9.7

Deoarece un element patrulater liniar are patru noduri, polinomul trebuie să conțină primii patru termeni $1, r, s$, și rs . În general, un element dreptunghiular Lagrange de gradul p are $(p+1)^2$ noduri ($p=0,1,\dots$). Elementul patrulater pătratic are 9 noduri. Polinomul este incomplet. Acesta conține polinomul complet de gradul doi (6 termeni) plus alți trei termeni trebuie aleși simetric: termenii de gradul trei r^2s și rs^2 și în plus termenul r^2s^2 .

Funcțiile de formă se definesc după cum urmează. Considerând doar axa r , așa cum se arată în partea de jos a figurii 9.6, se pot defini funcții de formă generice L_1, L_2 și L_3 având valoarea 1 în nodul cu același indice și zero în celelalte două noduri

$$L_1(r) = -\frac{r(1-r)}{2}, \quad L_2(r) = (1+r)(1-r), \quad L_3(r) = \frac{r(1+r)}{2}. \quad (9.79)$$

Acestea sunt polinoame Lagrange, care, pentru trei puncte, au următoarele expresii

$$L_1(r) = \frac{(r-r_2)(r-r_3)}{(r_1-r_2)(r_1-r_3)}, \quad L_2(r) = \frac{(r-r_1)(r-r_3)}{(r_2-r_1)(r_2-r_3)}, \quad L_3(r) = \frac{(r-r_1)(r-r_2)}{(r_3-r_1)(r_3-r_2)}.$$

Similar, funcții de formă generice pot fi definite în lungul axei s , după cum se arată în dreapta figurii 9.6, b

$$L_1(s) = -\frac{s(1-s)}{2}, \quad L_2(s) = (1+s)(1-s), \quad L_3(s) = \frac{s(1+s)}{2}. \quad (9.80)$$

Funcțiile de formă N_i pot fi construite ca produse ale funcțiilor unidimensionale de mai sus

$$\begin{bmatrix} N_1 & N_8 & N_4 \\ N_5 & N_9 & N_7 \\ N_2 & N_6 & N_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1(r) \\ L_2(r) \\ L_3(r) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1(s) & L_2(s) & L_3(s) \end{bmatrix}. \quad (9.81)$$

Trebuie menționat că indicii funcțiilor N_i corespund numerotării nodurilor din figura 9.6, a .

Deoarece nodurile interioare ale elementelor de ordin superior din familia Lagrange nu contribuie la conectivitatea între elemente, acestea pot fi condensate și eliminate la nivelul elementului, pentru a reduce dimensiunile matricilor elementelor. Alternativ, se pot utiliza elemente *serendipity*, dar funcțiile de formă ale acestora nu se pot obține folosind produse de funcții de interpolare unidimensionale.

9.5 Elementul triunghiular cu șase noduri

Elemente triunghiulare de ordin superior se pot obține utilizând triunghiul lui Pascal (fig. 9.8). Termenii polinomiali sunt dispuși asemenea nodurilor elementului finit, cu termenul constant, primul și ultimul termen de pe o linie în vârfurile triunghiului. Triunghiul cu șase noduri (fig. 9.9, a) este un element de ordinul 2 (adică gradul polinomului este 2), după cum se poate observa din primele trei linii ale triunghiului lui Pascal. Poligonul conține șase constante, care pot fi exprimate în funcție de valorile nodale ale variabilei interpolate

Pe baza elementului master din fig. 9.9, b , funcțiile de formă pot fi exprimate în funcție de coordonatele de arie ca la triunghiul cu deformații specifice liniare (8.36)

$$\begin{aligned} N_1 &= \zeta_1(2\zeta_1 - 1), & N_2 &= \zeta_2(2\zeta_2 - 1), & N_3 &= \zeta_3(2\zeta_3 - 1), \\ N_4 &= 4\zeta_1\zeta_2, & N_5 &= 4\zeta_2\zeta_3, & N_6 &= 4\zeta_3\zeta_1, \end{aligned} \quad (9.82)$$

unde $\zeta_1 = 1 - \zeta_2 - \zeta_3$. Datorită prezenței termenilor ζ_2^2, ζ_3^2 în funcțiile de formă, acest element este denumit *triunghi pătratic*.

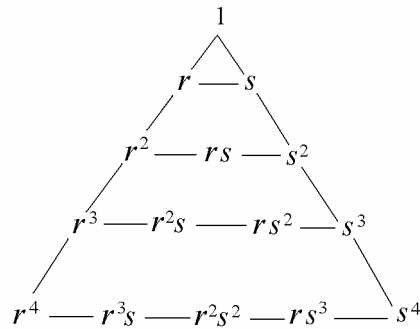


Fig. 9.8

Reprezentarea izoparametrică (8.37) este

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & \cdots & \cdots & N_6 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & \cdots & \cdots & 0 & N_6 \end{bmatrix} \{q^e\}, \tag{9.83}$$

unde

$$\{q^e\} = [u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad \cdots \quad \cdots \quad u_6 \quad v_6]^T,$$

și

$$x = \sum_{i=1}^6 N_i x_i, \quad y = \sum_{i=1}^6 N_i y_i. \tag{9.84}$$

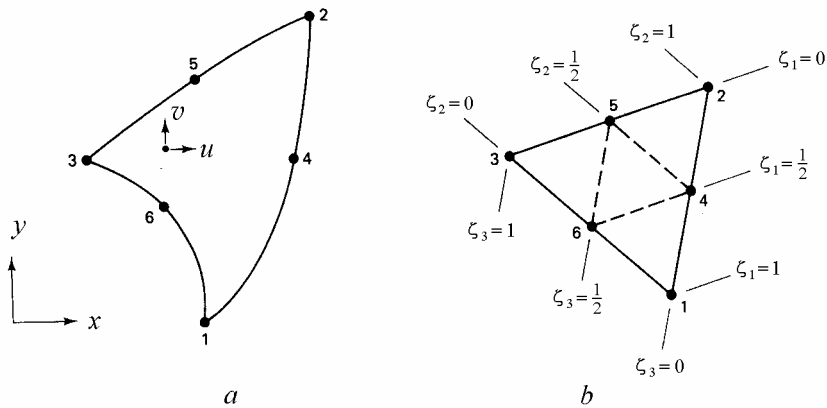


Fig. 9.9

Matricea de rigiditate a elementului, care trebuie integrată numeric, poate fi calculată din expresia (9.24) definind coordonatele (r, s) ca în (8.46). Rezultă

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial N_2} - \frac{\partial}{\partial N_1}, \quad \frac{\partial}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial N_3} - \frac{\partial}{\partial N_1}. \quad (9.85)$$

Detalii asupra metodelor de integrare numerică pentru triunghiuri sunt date în [18, 39]. Formulele de integrare numerică Gauss pentru un triunghi diferă de cele considerate anterior pentru dreptunghi.

9.6 Singularitatea matricii jacobiene

În elementele izoparametrice de ordin superior discutate mai sus, se remarcă existența nodurilor “de la mijlocul laturii”. Nodul din interiorul unei laturi trebuie să fie cât mai aproape de mijlocul laturii. Acesta trebuie plasat în treimea mijlocie a unei laturi. Această condiție face ca determinantul $\det [J]$ să nu se anuleze în elementul respectiv.

Trebuie verificat semnul determinantului $\det [J]$. Dacă jacobianul devine negativ în orice punct, se emite un semnal de avertizare care indică neunicitatea aplicației. De notat că în timp ce jacobianul este calculat totdeauna în punctele Gauss, este probabil să fie negativ la colțuri, unde ar putea fi calculate tensiunile.

O condiție necesară pentru aplicarea relației (9.14) funcțiilor de formă este ca matricea $[J]$ să poată fi inversată. Această inversă există dacă elementul nu este prea distorsionat astfel încât liniile cu valori constante ale variabilelor r și s să se intersecteze în interiorul sau pe marginile elementului, sau să existe vârfuri orientate spre interior. Când elementul este degenerat într-un triunghi prin creșterea unui unghi interior la 180^0 , matricea $[J]$ este singulară în colțul respectiv.

O situație similară apare atunci când două noduri de colț învecinate sunt suprapuse pentru a produce un element triunghiular. Prin urmare, pentru a asigura că matricea $[J]$ poate fi inversată, orice unghi interior la un nod de colț al elementului trebuie să fie mai mic de 180^0 , și, pe măsură ce un unghi interior tinde spre 180^0 există o descreștere a preciziei de evaluare a tensiunilor, în special la colțul respectiv.

Dacă determinantul $\det [J] \rightarrow 0$, atunci $[j]$ și operatorii din $[\partial]$ vor crește nelimitat și deci vor produce deformații specifice infinite de mari.

Afirmațiile de mai sus sunt ilustrate pentru elementul izoparametric pătratic unidimensional în figura 4.4. Vectorul linie al funcțiilor de formă este

$$[N] = [N_1 \quad N_2 \quad N_3] = \left[\frac{1}{2}r(r-1) \quad (1+r)(1-r) \quad \frac{1}{2}r(r+1) \right].$$

Matricea jacobiană este

$$[J] = J_{11} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial r} & \frac{\partial N_2}{\partial r} & \frac{\partial N_3}{\partial r} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2r-1}{2} & -2r & \frac{2r+1}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ x_2 \\ \ell \end{Bmatrix}.$$

Determinantul matricii jacobiene este

$$\det [J] = J_{11} = (r + 0,5)\ell - 2rx_2.$$

Pentru orice x_2 acest determinant se anulează în punctul

$$r_0 = \frac{0,5\ell}{2x_2 - \ell}.$$

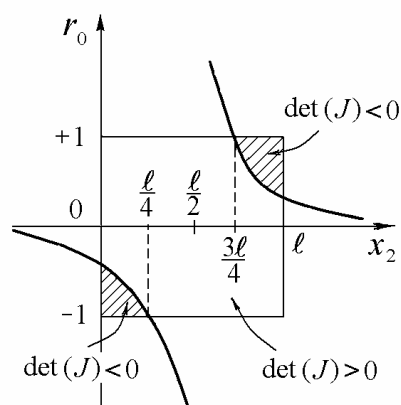


Fig. 9.10

Acest punct este în interiorul elementului (fig. 9.10) dacă $-1 \leq r_0 \leq 1$, adică dacă

$$-1 \leq \frac{0,5\ell}{2x_2 - \ell} \leq 1,$$

unde $0 \leq x_2 \leq \ell$.

Dacă $\frac{\ell}{4} < x_2 < \frac{3\ell}{4}$, atunci $\det [J]$ nu se anulează pe element. Aceasta explică recomandarea de a plasa nodul din interiorul laturii în *treimea* din mijloc a acesteia.

10.

ELEMENTE DE PLĂCĂ ÎNCOVOIATĂ

Structurile din plăci plane, ca pardoselile, podelele din clădiri și avioane, și punțile podurilor sunt încărcate cu sarcini perpendiculare pe planul lor. Aceste structuri pot fi analizate împărțind placa într-un ansamblu de elemente finite bidimensionale numite *elemente de placă încovoiată*, de formă triunghiulară, dreptunghiulară sau patrulateră. În acest capitol, se studiază câteva elemente finite utilizate în studiul încovoierii plăcilor plane subțiri și groase.

Plăcile subțiri, la care se neglijează efectul forfecării transversale, se analizează cu teoria clasică a lui Kirchhoff. Plăcile cu lunecări specifice constante pe grosime sunt studiate în teoria Reissner-Mindlin. La plăci groase sau plăci compozite se aplică teorii bazate pe legi de variație de grad superior a deformațiilor de forfecare (de ex. parabolică), în care unghiurile de lunecare specifică sunt nule pe fețele plăcii.

10.1 Teoria plăcilor subțiri (Kirchhoff)

Placa este definită ca un element de structură la care grosimea este mult mai mică decât celelalte două dimensiuni, raportul grosime/deschidere fiind $h/\ell \leq 0,1$. În acest caz, se poate presupune că deformația plăcii poate fi descrisă de starea de deformații a suprafeței mediane, egal depărtată de fețele plăcii.

Pentru plăci subțiri, se adoptă ipotezele lui Kirchhoff: a) nu există deformații de întindere (compresiune) în planul median al plăcii; b) normalele la planul median al plăcii nedeformate rămân drepte și normale la suprafața mediană a plăcii deformate; și c) tensiunile normale în direcție transversală pot fi neglijate.

Sistemul axelor de referință se alege astfel încât planul $x-y$ să coincidă cu suprafața mediană a plăcii (fig. 10.1) și direcția pozitivă a axei z să fie în sus. Placa are grosime constantă h și este încărcată cu sarcini distribuite pe suprafață.

Deplasările paralele cu suprafața mediană nedeformată sunt

$$u(x, y, z) = -z \frac{\partial w}{\partial x}, \quad v(x, y, z) = -z \frac{\partial w}{\partial y}, \quad (10.1)$$

în care $w(x, y)$ este deplasarea suprafeței mediane în direcția z (fig. 10.2, a).

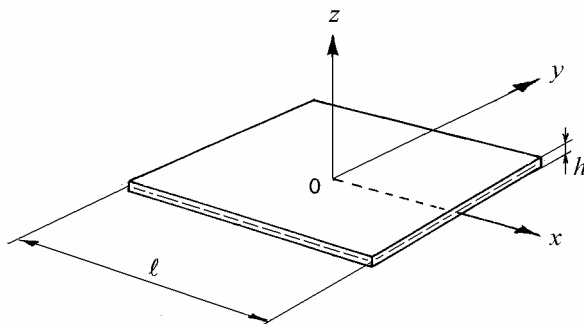


Fig. 10.1

Componentele deformațiilor specifice au următoarele expresii:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \\ \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0. \end{aligned} \quad (10.2)$$

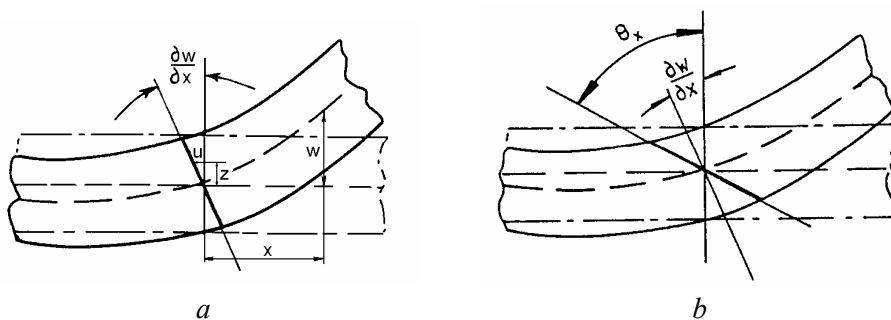


Fig. 10.2

Vectorul deformațiilor specifice poate fi scris sub forma

$$\{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_y & \gamma_{xy} \end{bmatrix}^T = -z \{\chi\}, \quad (10.3)$$

în care vectorul curburilor este

$$\{\chi\} = \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right]^T. \quad (10.4)$$

Deoarece $\sigma_z = 0$, relațiile între tensiuni și deformații specifice au forma

$$\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\} = -z [D] \{\chi\}, \quad (10.5)$$

unde

$$\{\sigma\} = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}]^T, \quad (10.6)$$

și matricea de rigiditate a materialului

$$[D] = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{16} \\ d_{12} & d_{22} & d_{26} \\ d_{16} & d_{26} & d_{66} \end{bmatrix}. \quad (10.7)$$

Energia de deformație a plăcii este

$$U = \frac{1}{2} \int_V \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} dV = \frac{1}{2} \int_A \frac{h^3}{12} \{\chi\}^T [D] \{\chi\} dA. \quad (10.8)$$

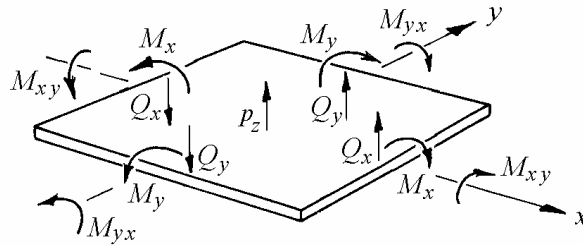


Fig. 10.3

Sensul pozitiv al momentelor încovoietoare și momentelor de răsucire (pe unitatea de lungime) este indicat în fig. 10.3. Relațiile de definiție ale momentelor se scriu matricial sub forma

$$[M_x \quad M_y \quad M_{xy}] = \int_{-h/2}^{h/2} z [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}] dz. \quad (10.9)$$

Dacă se notează

$$\bar{D}_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} d_{ij} z^2 dz \quad (10.10)$$

atunci relațiile între momente și curburi se pot scrie sub forma

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{D}_{11} & \bar{D}_{12} & \bar{D}_{16} \\ \bar{D}_{12} & \bar{D}_{22} & \bar{D}_{26} \\ \bar{D}_{16} & \bar{D}_{26} & \bar{D}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (10.11)$$

sau

$$\{M\} = -[\bar{D}]\{\chi\}. \quad (10.12)$$

La materiale izotrope

$$[\bar{D}] = D \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (10.13)$$

unde

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad (10.14)$$

E este modulul de elasticitate longitudinal și ν este coeficientul lui Poisson.

Ecuțiile de echilibru sunt

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} - Q_x &= 0, \\ \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y &= 0, \\ \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + p_z &= 0, \end{aligned} \quad (10.15)$$

unde p_z este sarcina distribuită transversală (pe unitatea de suprafață) iar Q_x , Q_y sunt forțe tăietoare (pe unitatea de lungime).

Din (10.11) și (10.15) rezultă

$$Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right). \quad (10.16)$$

Înlocuind (10.16) în ultima ecuație (10.15), se obține ecuația diferențială de echilibru în cazul materialelor izotrope

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p_z}{D}. \quad (10.17)$$

Tensiunile de încovoiere și de răsucire sunt date de (10.9)

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_y & \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{12z}{h^3} \begin{bmatrix} M_x & M_y & M_{xy} \end{bmatrix} \quad (10.18)$$

iar tensiunile de forfecare de

$$\begin{bmatrix} \tau_{zx} & \tau_{yz} \end{bmatrix} = \frac{3}{2h} \left(1 - \frac{4z^2}{h^2} \right) \begin{bmatrix} Q_x & Q_y \end{bmatrix}, \quad (10.19)$$

unde s-a presupus o distribuție parabolică pe grosimea plăcii.

Energia de deformație (10.8) se poate scrie sub forma

$$U = \frac{D}{2} \int_A \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2(1-\nu) \left(\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] dx dy. \quad (10.20)$$

Potențialul sarcinii exterioare este

$$W_P = - \int_A p_z w dx dy. \quad (10.21)$$

10.2 Teoria plăcilor Reissner-Mindlin

La plăcile de grosime moderată, raportul grosime/deschidere nu este suficient de mic pentru a putea neglija deformațiile de forfecare transversale și ipotezele lui Kirchhoff nu mai sunt valabile. Pentru a rezolva această problemă, se renunță la ipoteza clasică conform căreia lunecările specifice în secțiunea transversală sunt nule. Inițial, Reissner a propus considerarea rotirilor normalei la suprafața mediană a plăcii în planele xOz și yOz ca variabile independente. Ulterior, Mindlin a simplificat ipoteza lui Reissner presupunând că normalele la suprafața mediană a plăcii înainte de deformare rămân drepte dar nu neapărat normale la suprafața mediană după deformarea plăcii. Deplasările suprafeței mediane sunt independente de rotirile normalei (fig. 10.2, *b*). Tensiunile normale transversale sunt neglijate ca în cazul teoriei lui Kirchhoff.

Conform ipotezelor Reissner-Mindlin, deplasările paralele cu suprafața mediană pot fi exprimate sub forma

$$u(x, y, z) = z\theta_y(x, y), \quad v(x, y, z) = -z\theta_x(x, y), \quad (10.22)$$

unde θ_x , θ_y sunt rotirile față de axele Ox și Oy ale liniilor normale la planul median înainte de deformarea plăcii.

Deformațiile specifice în planul plăcii sunt

$$\{\varepsilon\} = -z\{\chi\}, \quad (10.23)$$

unde vectorul curburilor este

$$\{\chi\} = \left[-\frac{\partial\theta_y}{\partial x} \quad \frac{\partial\theta_x}{\partial y} \quad \frac{\partial\theta_x}{\partial x} - \frac{\partial\theta_y}{\partial y} \right]^T. \quad (10.24)$$

Unghiurile de deformație specifică transversală sunt

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}. \quad (10.25)$$

Înlocuind deplasările din (10.22) rezultă

$$\{\gamma\} = \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\theta_x + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \theta_y + \frac{\partial w}{\partial x} \end{Bmatrix}. \quad (10.26)$$

De notat că atunci când $\gamma_{yz} = 0$, $\gamma_{zx} = 0$, relațiile (10.26) devin $\theta_x = \frac{\partial w}{\partial y}$,

$\theta_y = -\frac{\partial w}{\partial x}$, iar expresia (10.24) se reduce la (10.4).

Tensiunile tangențiale medii sunt date de

$$\{\tau\} = \begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \kappa [D^S] \{\gamma\}, \quad (10.27)$$

unde κ este un *factor de corecție pentru forfecare* și

$$[D^S] = \begin{bmatrix} G & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix} = \frac{E}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (10.28)$$

Energia de deformație a plăcii se poate scrie ca suma energiilor datorite deformațiilor de încovoire și de forfecare

$$U = \frac{1}{2} \int_V \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} dV + \frac{1}{2} \int_V \{\tau\}^T \{\gamma\} dV \quad (10.29)$$

sau, integrând pe grosimea plăcii

$$U = \frac{1}{2} \int_A \frac{h^3}{12} \{\chi\}^T [D] \{\chi\} dA + \frac{1}{2} \int_A \kappa h \{\gamma\}^T [D^S] \{\gamma\} dA. \quad (10.30)$$

La materiale izotrope, expresiile (10.11) devin

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = D \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{\partial \theta_y}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial x} - \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (10.31)$$

sau (10.12), în care $\{\chi\}$ este dat de (10.24).

Ecuatia constitutivă a forfecării transversale este

$$\begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = \kappa G \begin{Bmatrix} -\theta_x + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \theta_y + \frac{\partial w}{\partial x} \end{Bmatrix}. \quad (10.32)$$

Energia de deformație (10.30) poate fi exprimată sub forma

$$U = \frac{1}{2} \int_A \left[M_x \left(-\frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) + M_{xy} \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} - \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) + M_y \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \right] dx dy + \\ + \frac{1}{2} \int_A \left[Q_x \left(\theta_y + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + Q_y \left(-\theta_x + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] dx dy.$$

Dacă $\theta_x = \frac{\partial w}{\partial y}$ și $\theta_y = -\frac{\partial w}{\partial x}$, expresia de mai sus se reduce la (10.20).

Principalul dezavantaj al acestei teorii este considerarea unei valori medii arbitrare a unghiurilor de lunecare specifică. Dacă unghiul de lunecare specifică este constant pe grosimea plăcii, pe fețele plăcii lunecările specifice nu sunt zero, ceea ce este incorect. Această ipoteză este echivalentă cu introducerea unor tensiuni tangențiale ‘parazite’ care forțează normala să rămână o linie dreaptă. Pe măsură ce grosimea plăcii este micșorată, energia de deformație de forfecare prezisă de analiza cu elemente finite crește considerabil și produce fenomenul de *blocaj la forfecare* (‘shear locking’) pentru valori mari ale raportului deschidere/grosime.

10.3 Elemente de placă încovoiată dreptunghiulară

Pentru un element de placă încovoiată subțire, energia de deformație este dată de (10.20) și potențialul sarcinii exterioare de (10.21). Derivata de ordin maxim din aceste expresii este derivata a doua. Pentru convergență, este necesar ca w și primele sale derivate $\frac{\partial w}{\partial x}$ și $\frac{\partial w}{\partial y}$ să fie continue la granița între elemente.

Prin urmare, aceste trei mărimi sunt considerate ca grade de libertate la fiecare nod. În plus, conform criteriilor de convergență ale metodei Rayleigh-Ritz, trebuie utilizate polinoame complete de cel puțin gradul doi. Funcția deplasărilor transversale, independentă de configurația elementului, este de forma

$$w = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2 + \text{termeni de grad superior.} \quad (10.33)$$

În figura 10.4 se arată un element dreptunghiular de grosime mică h , cu patru noduri, câte unul la fiecare colț.

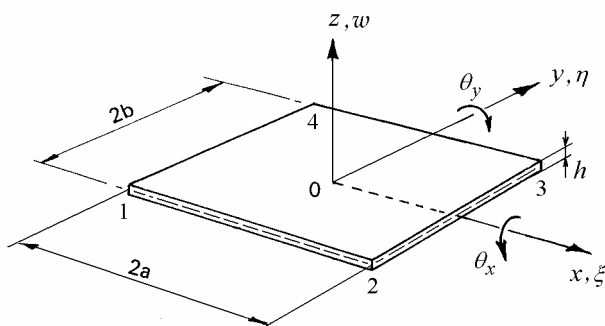


Fig. 10.4

În continuare se vor folosi coordonatele adimensionale $\xi = x/a$ și $\eta = y/b$ cu originea în centrul plăcii.

10.3.1 Elementul ACM (neconform)

În figura 10.5 se prezintă *elementul ACM* (Adini, Clough, Melosh - 1961, 1963). La fiecare colț sunt alocate trei grade de libertate nodale, și anume, deplasarea transversală w , și cele două rotiri $\theta_x = \frac{\partial w}{\partial y}$ și $\theta_y = -\frac{\partial w}{\partial x}$. Exprimare în funcție de coordonatele adimensionale ξ și η , acestea devin

$$\theta_x = \frac{1}{b} \frac{\partial w}{\partial \eta}, \quad \theta_y = -\frac{1}{a} \frac{\partial w}{\partial \xi}. \quad (10.34)$$

Deoarece elementul are 12 grade de libertate, funcția deplasărilor poate fi reprezentată de un polinom cu 12 termeni, și anume

$$w = \alpha_1 + \alpha_2 \xi + \alpha_3 \eta + \alpha_4 \xi^2 + \alpha_5 \xi \eta + \alpha_6 \eta^2 + \alpha_7 \xi^3 + \alpha_8 \xi^2 \eta + \alpha_9 \xi \eta^2 + \alpha_{10} \eta^3 + \alpha_{11} \xi^3 \eta + \alpha_{12} \xi \eta^3. \quad (10.35)$$

De observat că această funcție este un polinom de gradul trei complet la care s-au adăugat doi termeni de gradul patru $\xi^3 \eta$ și $\xi \eta^3$, dispuși simetric în triunghiul lui Pascal. Aceasta asigură invarianța geometrică a elementului.

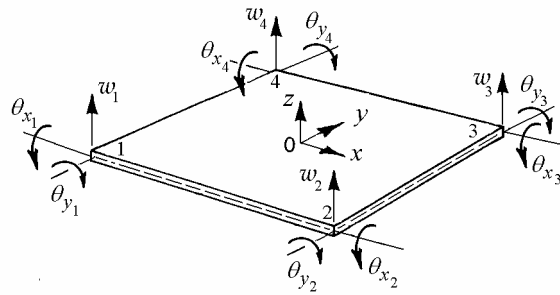


Fig. 10.5

Expresia (10.35) se poate scrie matricial sub forma

$$w = [1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi^2 \quad \xi \eta \quad \eta^2 \quad \xi^3 \quad \xi^2 \eta \quad \xi \eta^2 \quad \eta^3 \quad \xi^3 \eta \quad \xi \eta^3] \{\alpha\}, \quad (10.36)$$

$$w = [P(\xi, \eta)] \{\alpha\}, \quad (10.36, a)$$

unde

$$\{\alpha\}^T = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \dots \quad \alpha_{12}]. \quad (10.37)$$

Derivând (10.36) se obține

$$\frac{\partial w}{\partial \xi} = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 2\xi \quad \eta \quad 0 \quad 3\xi^2 \quad 2\xi \eta \quad \eta^2 \quad 0 \quad 3\xi^2 \eta \quad \eta^3] \{\alpha\}, \quad (10.38)$$

$$\frac{\partial w}{\partial \eta} = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad \xi \quad 2\eta \quad 0 \quad \xi^2 \quad 2\xi \eta \quad 3\eta^2 \quad \xi^3 \quad 3\xi \eta^2] \{\alpha\}. \quad (10.39)$$

Evaluând (10.36), (10.38) și (10.39) la $\xi = \pm 1$, $\eta = \pm 1$ rezultă

$$\{\bar{q}^e\} = [A^e] \{\alpha\}, \quad (10.40)$$

unde

$$\{\bar{q}^e\}^T = [w_1 \quad b\theta_{x1} \quad a\theta_{y1} \quad \dots \quad w_4 \quad b\theta_{x4} \quad a\theta_{y4}] \{\alpha\}, \quad (10.41)$$

iar matricea $[A^e]$ este dată în [87] dar nu este reprodusă aici, pentru concizie.

Din (10.40) se obține $\{\alpha\}$ prin inversare

$$\{\alpha\} = [A^e]^{-1} \{\bar{q}^e\}. \quad (10.42)$$

Înlocuind (10.42) în (10.36, a) rezultă

$$w = [N(\xi, \eta)] \{q^e\} = [[N_1] \quad [N_2] \quad [N_3] \quad [N_4]] \{q^e\}, \quad (10.43)$$

în care vectorul deplasărilor nodale este

$$\{q^e\}^T = [w_1 \quad \theta_{x1} \quad \theta_{y1} \quad \dots \quad w_4 \quad \theta_{x4} \quad \theta_{y4}], \quad (10.44)$$

iar funcțiile de formă sunt definite de

$$[N_i(\xi, \eta)]^T = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{8} (1 + \xi_i \xi) (1 + \eta_i \eta) (2 + \xi_i \xi + \eta_i \eta - \xi^2 - \eta^2) \\ \frac{b}{8} (1 + \xi_i \xi) (\eta_i + \eta) (\eta^2 - 1) \\ \frac{a}{8} (\xi_i + \xi) (\xi^2 - 1) (1 + \eta_i \eta) \end{array} \right\}, \quad (10.45)$$

unde (ξ_i, η_i) sunt coordonatele nodului i .

Elementul este neconform. Într-adevăr, evaluând (10.45) pe latura 2-3 (pentru $\xi = +1$) se obține

$$[N_1]^T = \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\}, \quad [N_2]^T = \left\{ \begin{array}{l} (1/4)(1-\eta)(2-\eta-\eta^2) \\ (b/4)(-1+\eta)(\eta^2-1) \\ 0 \end{array} \right\},$$

$$[N_3]^T = \left\{ \begin{array}{l} (1/4)(1+\eta)(2+\eta-\eta^2) \\ (b/4)(1+\eta)(\eta^2-1) \\ 0 \end{array} \right\}, \quad [N_4]^T = \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\}.$$

Aceasta arată că deplasarea w , și deci rotirea θ_x , sunt determinate univoc de valorile lor la nodurile 2 și 3. Dacă elementul este alipit de alt element dreptunghiular în nodurile 2 și 3, atunci w și θ_x vor fi continue în lungul laturii comune. Din păcate, aceasta nu se aplică rotirii θ_y .

Rotirea θ_y este dată de (10.34)

$$\theta_y = -\frac{1}{a} \frac{\partial w}{\partial \xi} = -\frac{1}{a} \left[\frac{\partial [N_1]}{\partial \xi} \quad \dots \quad \frac{\partial [N_4]}{\partial \xi} \right] \{q^e\}. \quad (10.46)$$

Înlocuind (10.45) în (10.46) se obține

$$\frac{\partial [N_i(\xi, \eta)]^T}{\partial \xi} = \begin{Bmatrix} \xi_i \eta (\eta_i - \eta) \\ \frac{b}{8} \xi_i (\eta_i + \eta) (\eta^2 - 1) \\ -\frac{a}{8} (2 + 2\xi_i) (1 + \eta_i \eta) \end{Bmatrix}. \quad (10.47)$$

Evaluând (10.47) în lungul $\xi = +1$ rezultă

$$\frac{\partial [N_1]^T}{\partial \xi} = \begin{Bmatrix} -\eta(-1-\eta) \\ -(b/8)(-1+\eta)(\eta^2-1) \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \frac{\partial [N_2]^T}{\partial \xi} = \begin{Bmatrix} \eta(-1-\eta) \\ (b/8)(-1+\eta)(\eta^2-1) \\ -(a/2)(1-\eta) \end{Bmatrix},$$

$$\frac{\partial [N_3]^T}{\partial \xi} = \begin{Bmatrix} \eta(-1-\eta) \\ (b/8)(1+\eta)(\eta^2-1) \\ -(a/2)(1+\eta) \end{Bmatrix}, \quad \frac{\partial [N_4]^T}{\partial \xi} = \begin{Bmatrix} -\eta(1-\eta) \\ -(b/8)(1+\eta)(\eta^2-1) \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Expresiile de mai sus arată că θ_y este determinat de valorile lui w și θ_x la nodurile 1, 2, 3, și 4, cât și de valorile lui θ_y la nodurile 2 și 3. Rotirea θ_y nu este continuă pe latura 2-3 deci elementul este neconform.

Înlocuind (10.43) în (10.4) și (10.8) se obține

$$U_e = \frac{1}{2} \{q^e\}^T [k^e] \{q^e\}, \quad (10.48)$$

unde matricea de rigiditate a elementului este

$$[k^e] = \int_A \frac{h^3}{12} [B]^T [D] [B] dA \quad (10.49)$$

iar matricea care exprimă deformațiile specifice în funcție de deplasări este

$$[B] = \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} [N] = \begin{Bmatrix} \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \\ \frac{1}{b^2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \\ \frac{2}{ab} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \end{Bmatrix} [N(\xi, \eta)]. \quad (10.50)$$

Înlocuind funcțiile de formă din (10.45) și integrând se obține matricea de rigiditate a elementului

$$[k^e] = \frac{Eh^3}{48(1-\nu^2)ab} \begin{bmatrix} [k_{11}] & [k_{12}] & [k_{13}] & [k_{14}] \\ & [k_{22}] & [k_{23}] & [k_{24}] \\ & & [k_{33}] & [k_{34}] \\ \text{sim} & & & [k_{44}] \end{bmatrix} \quad (10.51)$$

în care submatricile au următoarele expresii

$$[k_{11}] = \begin{bmatrix} 4(\beta^2 + \alpha^2) + \frac{2}{5}(7-2\nu) & \left\{ 2\alpha^2 + \frac{1}{5}(1+4\nu) \right\} b & \left\{ -2\beta^2 - \frac{1}{5}(1+4\nu) \right\} a \\ & \left\{ \frac{4}{3}\alpha^2 + \frac{4}{15}(1-\nu) \right\} b^2 & -\nu ab \\ \text{sim} & & \left\{ \frac{4}{3}\beta^2 + \frac{4}{15}(1-\nu) \right\} a^2 \end{bmatrix},$$

$$[k_{12}] = \begin{bmatrix} -\left\{ 2(2\beta^2 - \alpha^2) + \frac{2}{5}(7-2\nu) \right\} & \left\{ \alpha^2 - \frac{1}{5}(1+4\nu) \right\} b & -\left\{ 2\beta^2 + \frac{1}{5}(1-\nu) \right\} a \\ \left\{ \alpha^2 - \frac{1}{5}(1+4\nu) \right\} b & \left\{ \frac{2}{3}\alpha^2 - \frac{4}{15}(1-\nu) \right\} b^2 & 0 \\ \left\{ 2\beta^2 + \frac{1}{5}(1-\nu) \right\} a & 0 & \left\{ \frac{2}{3}\beta^2 - \frac{1}{15}(1-\nu) \right\} a^2 \end{bmatrix},$$

$$[k_{13}] = \begin{bmatrix} -\left\{ 2(\beta^2 + \alpha^2) + \frac{2}{5}(7-2\nu) \right\} & \left\{ \alpha^2 - \frac{1}{5}(1-\nu) \right\} b & \left\{ -\beta^2 + \frac{1}{5}(1-\nu) \right\} a \\ \left\{ -\alpha^2 + \frac{1}{5}(1-\nu) \right\} b & \left\{ \frac{1}{3}\alpha^2 + \frac{1}{15}(1-\nu) \right\} b^2 & 0 \\ \left\{ \beta^2 - \frac{1}{5}(1-\nu) \right\} a & 0 & \left\{ \frac{1}{3}\beta^2 + \frac{1}{15}(1-\nu) \right\} a^2 \end{bmatrix},$$

$$[k_{41}] = \begin{bmatrix} 2(\beta^2 - 2\alpha^2) - \frac{2}{5}(7 - 2\nu) & \left\{ 2\alpha^2 + \frac{1}{5}(1 - \nu) \right\} b & \left\{ -\beta^2 + \frac{1}{5}(1 + 4\nu) \right\} a \\ \left\{ -2\alpha^2 - \frac{1}{5}(1 - \nu) \right\} b & \left\{ \frac{2}{3}\alpha^2 - \frac{1}{15}(1 - \nu) \right\} b^2 & 0 \\ \left\{ -\beta^2 + \frac{1}{5}(1 + 4\nu) \right\} a & 0 & \left\{ \frac{2}{3}\beta^2 - \frac{4}{15}(1 - \nu) \right\} a^2 \end{bmatrix}$$

și unde s-a notat

$$\alpha = \frac{a}{b}, \quad \beta = \frac{b}{a}.$$

Celelalte submatrici din (10.51) sunt

$$\begin{aligned} [k_{22}] &= [I_3]^T [k_{11}] [I_3], \quad [k_{23}] = [I_3]^T [k_{14}] [I_3], \quad [k_{24}] = [I_3]^T [k_{23}] [I_3], \\ [k_{33}] &= [I_1]^T [k_{11}] [I_1], \quad [k_{34}] = [I_1]^T [k_{12}] [I_1], \\ [k_{44}] &= [I_2]^T [k_{11}] [I_2], \end{aligned} \quad (10.52)$$

unde

$$[I_1] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [I_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [I_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (10.53)$$

Relațiile de mai sus sunt prezentate în lucrarea [87].

La stabilirea acestui rezultat, este mai ușor să se utilizeze expresia (10.36) a deplasării w și să se înlocuiască $\{\alpha\}$ după efectuarea integrării. O integrală tipică are forma

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \xi^m \eta^n d\xi d\eta = \begin{cases} 0 & m \text{ sau } n \text{ impare,} \\ \frac{4}{(m+1)(n+1)} & m \text{ și } n \text{ pare.} \end{cases}$$

Pentru $p_z = \text{constant}$, înlocuind funcțiile de formă în

$$\{f^e\} = \int_A [N]^T p_z dA \quad (10.54)$$

și integrând, se obține vectorul forțelor nodale echivalente sub forma

$$\{f^e\} = p_z \frac{ab}{3} [3 \quad b \quad -a \quad 3 \quad b \quad a \quad 3 \quad -b \quad a \quad 3 \quad -b \quad -a]^T.$$

Tensiunile în orice punct al plăcii sunt date de (10.5). Ele pot fi exprimate în funcție de deplasările nodale sub forma

$$\{\sigma\} = -z [D] [B] \{q^e\}, \quad (10.55)$$

în care $[B]$ este definită în (10.50). Valorile cele mai precise se obțin în punctele Gauss utilizând integrarea numerică în (2×2) puncte.

10.3.2 Elementul BFS (conform)

Un element dreptunghiular compatibil, având forma din fig. 10.4, denumit *elementul BFS* (Bogner, Fox și Schmit - 1966), poate fi construit utilizând produse de funcții de formă de tip Hermite unidimensionale (5.21) ca cele utilizate la grinzi subțiri. Acesta este un element de placă încovoiată subțire cu patru noduri.

Funcția de aproximare nodală a deplasărilor are forma (10.43) în care

$$[N_i(\xi, \eta)]^T = \begin{Bmatrix} f_i(\xi) f_i(\eta) \\ b f_i(\xi) g_i(\eta) \\ -a g_i(\xi) f_i(\eta) \end{Bmatrix}, \quad (10.56)$$

unde

$$\begin{aligned} f_i(\xi) &= \frac{1}{4} (2 + 3\xi_i \xi - \xi_i \xi^3), & g_i(\xi) &= \frac{1}{4} (-\xi_i - \xi + \xi_i \xi^2 + \xi^3), \\ f_i(\eta) &= \frac{1}{4} (2 + 3\eta_i \eta - \eta_i \eta^3), & g_i(\eta) &= \frac{1}{4} (-\eta_i - \eta + \eta_i \eta^2 + \eta^3), \end{aligned} \quad (10.57)$$

în care (ξ_i, η_i) sunt coordonatele nodului i .

Din păcate, examinând derivatele acestor produse se observă că unghiul de răsucire $\partial^2 w / \partial \xi \partial \eta$ este zero în cele patru colțuri și nu există vreo componentă constantă a acestei derivate secunde. Cum aceasta măsoară unghiul de lunecare specifică în expresia (10.2), nu este îndeplinită cerința de bază ca elementul să descrie toate stările cu deformații specifice constante. La limită, pe măsura creșterii numărului de elemente, placa va tinde spre condiția de răsucire nulă.

Un compromis se poate realiza utilizând polinoame hermitiene cubice pentru funcțiile de formă ale deplasărilor și polinoame liniare pentru funcțiile de formă ale rotirilor. Acest element are deformații specifice constante dar este incompatibil, producând discontinuități de pantă la granița dintre elemente. Totuși, pe măsură ce discretizarea este mai fină și dimensiunile elementelor scad, rezultatele sunt convergente.

Remediul pentru elementul BFS este introducerea derivatei a doua $\partial^2 w / \partial \xi \partial \eta$ ca un grad de libertate adițional la fiecare nod. În acest caz, funcția de aproximare a deplasărilor are forma (10.43) însă cu 16 termeni

$$\{q^e\}^T = [w_1 \quad \theta_{x1} \quad \theta_{y1} \quad w''_{xy1} \quad \cdots \quad w_4 \quad \theta_{x4} \quad \theta_{y4} \quad w''_{xy4}], \quad (10.58)$$

în care $w''_{xy} \equiv \partial^2 w / \partial x \partial y$ și

$$[N_i(\xi, \eta)]^T = \begin{Bmatrix} f_i(\xi) f_i(\eta) \\ b f_i(\xi) g_i(\eta) \\ -a g_i(\xi) f_i(\eta) \\ ab g_i(\xi) g_i(\eta) \end{Bmatrix}. \quad (10.59)$$

Acest element poate avea mișcări de corp rigid fără să se deformeze și poate descrie starea de încovoiere pură în direcțiile x și y . Această comportare este asigurată de prezența în funcțiile (10.59) a primilor șase termeni din (10.33).

Matricea de rigiditate a elementului și vectorul coerent al forțelor nodale sunt date de (10.49) și (10.54), în care matricea $[N]$ este definită de (10.43) și (10.59).

Deși elementul BFS este mult mai precis decât elementul ACM, utilizarea acestuia împreună cu alte tipuri de elemente în structuri complexe este dificilă datorită prezenței gradului de libertate $\partial^2 w / \partial x \partial y$. Acest inconvenient este eliminat în elementul WB (Wilson, Brebbia – 1971) prin introducerea aproximațiilor

$$\begin{aligned} w''_{xy1} &= \frac{1}{2b} (\theta_{y1} - \theta_{y4}), & w''_{xy2} &= \frac{1}{2a} (\theta_{x2} - \theta_{x1}), \\ w''_{xy3} &= \frac{1}{2b} (\theta_{y2} - \theta_{y3}), & w''_{xy4} &= \frac{1}{2a} (\theta_{x3} - \theta_{x4}). \end{aligned}$$

Aplicând constrângerile de mai sus, elementul BFS este transformat într-un element incompatibil. Deplasarea transversală și panta tangentei sunt continue la granița dintre elemente, dar panta normalei nu este continuă.

10.3.3 Elementul HTK

Când grosimea este mai mare decât aproximativ o zecime din lățimea plăcii, deformațiile de forfecare devin importante și se adoptă un model de placă Reissner-Mindlin. Pentru un element gros de placă încovoiată, expresia energiei de deformație este (10.30) iar potențialul sarcinii exterioare este (10.21), în care $\{\mathcal{X}\}$ și $\{\gamma\}$ sunt date de (10.24) și (10.26). Derivata de ordinul cel mai înalt a funcțiilor w , θ_x și θ_y , care apare în aceste expresii este cea de ordinul întâi. Deci, pentru convergență, w , θ_x și θ_y sunt singurele grade de libertate necesare la noduri (fig. 10.5).

La *elementul HTK* (Hughes, Taylor și Kanoknukulcha - 1977) cu patru noduri, deplasările w , θ_x și θ_y sunt dezvoltate *separat* în funcție de valorile nodale. Deformația de forfecare este reprezentată direct, fără să se apeleze la derivata momentului încovoietor.

Funcțiile de aproximare a deplasărilor au forma

$$w = \sum_{i=1}^4 N_i w_i, \quad \theta_x = \sum_{i=1}^4 N_i \theta_{xi}, \quad \theta_y = \sum_{i=1}^4 N_i \theta_{yi}, \quad (10.60)$$

unde funcțiile N_i sunt definite de (9.3), sub forma

$$N_i = \frac{1}{4} (1 + \xi_i \xi) (1 + \eta_i \eta). \quad (10.61)$$

Aceste funcții asigură continuitatea deplasărilor w , θ_x și θ_y la interfața între elemente.

În formă matricială, expresiile (10.60) pot fi scrise

$$\begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = [N] \{q^e\}, \quad (10.62)$$

unde (10.44)

$$\{q^e\}^T = [w_1 \quad \theta_{x1} \quad \theta_{y1} \quad \cdots \quad w_4 \quad \theta_{x4} \quad \theta_{y4}],$$

și

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & \cdots & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & \cdots & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & \cdots & 0 & 0 & N_4 \end{bmatrix}. \quad (10.63)$$

Înlocuind (10.62) în (10.24), (10.26) și (10.30) se obține

$$U_e = \frac{1}{2} \{q^e\}^T [k^e] \{q^e\}, \quad (10.64)$$

unde *matricea de rigiditate a elementului* $[k^e]$ poate fi scrisă ca suma matricilor datorite încovoierii și forfecării

$$[k^e] = [k^B] + [k^S]. \quad (10.65)$$

În (10.65) cei doi termeni au expresiile

$$[k^B] = \int_A \frac{h^3}{12} [B^B]^T [D] [B^B] dA \quad (10.66)$$

și

$$[k^S] = \int_A \kappa h [B^S]^T [D^S] [B^S] dA. \quad (10.67)$$

Matricea $[B^B]$ pentru încovoiere are forma

$$[B^B] = \begin{bmatrix} [B_1^B] & [B_2^B] & [B_3^B] & [B_4^B] \end{bmatrix} \quad (10.68)$$

unde

$$[B_i^B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\partial N_i / \partial x \\ 0 & \partial N_i / \partial y & 0 \\ 0 & \partial N_i / \partial x & -\partial N_i / \partial y \end{bmatrix}. \quad (10.69)$$

Matricea $[B^S]$ pentru forfecare are forma

$$[B^S] = \begin{bmatrix} [B_1^S] & [B_2^S] & [B_3^S] & [B_4^S] \end{bmatrix} \quad (10.70)$$

unde

$$[B_i^S] = \begin{bmatrix} \partial N_i / \partial x & 0 & N_i \\ \partial N_i / \partial y & -N_i & 0 \end{bmatrix}. \quad (10.71)$$

Înlocuind (10.61) în (10.69) și (10.71) se obține

$$[B_i^B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\xi_i(1+\eta_i\eta)/4a \\ 0 & (1+\xi_i\xi)\eta_i/4b & 0 \\ 0 & \xi_i(1+\eta_i\eta)/4a & -(1+\xi_i\xi)\eta_i/4b \end{bmatrix} \quad (10.72)$$

și

$$[B_i^S] = \begin{bmatrix} \xi_i(1+\eta_i\eta)/4a & 0 & (1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta)/4 \\ (1+\xi_i\xi)\eta_i/4b & -(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta)/4 & 0 \end{bmatrix}. \quad (10.73)$$

Înlocuind (10.72) în (10.68) și apoi matricea respectivă în (10.66) se obține matricea de rigiditate a elementului pentru încovoiere

$$[k^B] = \frac{Eh^3}{48(1-\nu^2)ab} \begin{bmatrix} [k_{11}^B] & [k_{12}^B] & [k_{13}^B] & [k_{14}^B] \\ & [k_{22}^B] & [k_{23}^B] & [k_{24}^B] \\ & & [k_{33}^B] & [k_{34}^B] \\ \text{sim} & & & [k_{44}^B] \end{bmatrix} \quad (10.74)$$

în care submatricile au următoarele expresii

$$[k_{11}^B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} \left\{ \alpha^2 + \frac{1}{2}(1-\nu) \right\} b^2 & -\frac{1}{2}(1+\nu)ab \\ 0 & -\frac{1}{2}(1+\nu)ab & \frac{4}{3} \left\{ \beta^2 + \frac{1}{2}(1-\nu) \right\} a^2 \end{bmatrix},$$

$$[k_{12}^B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \left\{ \alpha^2 - (1-\nu) \right\} b^2 & \frac{1}{2}(3\nu-1)ab \\ 0 & -\frac{1}{2}(3\nu-1)ab & \frac{1}{3} \left\{ -4\beta^2 + (1-\nu) \right\} a^2 \end{bmatrix},$$

$$[k_{13}^B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \left\{ -\alpha^2 - \frac{1}{2}(1-\nu) \right\} b^2 & \frac{1}{2}(1+\nu)ab \\ 0 & \frac{1}{2}(1+\nu)ab & \frac{2}{3} \left\{ -\beta^2 - \frac{1}{2}(1-\nu) \right\} a^2 \end{bmatrix},$$

$$[k_{14}^B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \left\{ -4\alpha^2 + (1-\nu) \right\} b^2 & -\frac{1}{2}(3\nu-1)ab \\ 0 & \frac{1}{2}(3\nu-1)ab & \frac{2}{3} \left\{ \beta^2 - (1-\nu) \right\} a^2 \end{bmatrix},$$

și unde s-a notat

$$\alpha = \frac{a}{b}, \quad \beta = \frac{b}{a}.$$

Celelalte submatrici din (10.74) au expresii ca în (10.52).

Înlocuind (10.73) în (10.71) și apoi matricea respectivă în (10.67) se obține matricea de rigiditate a elementului pentru forfecare

$$[k^S] = \frac{Eh^3}{48\gamma_S ab} \begin{bmatrix} [k_{11}^S] & [k_{12}^S] & [k_{13}^S] & [k_{14}^S] \\ & [k_{22}^S] & [k_{23}^S] & [k_{24}^S] \\ & & [k_{33}^S] & [k_{34}^S] \\ \text{sim} & & & [k_{44}^S] \end{bmatrix}, \quad (10.75)$$

unde $\gamma_S = Eh^3/12\kappa Gb^2$ este un factor de forfecare similar cu (5.97) și

$$[k_{11}^S] = \begin{bmatrix} 1+\alpha^2 & \alpha^2 b & -a \\ \alpha^2 b & \alpha^2 b^2 & 0 \\ -a & 0 & a^2 \end{bmatrix}, \quad [k_{12}^S] = \begin{bmatrix} -1+\alpha^2 & \alpha^2 b & -a \\ \alpha^2 b & \alpha^2 b^2 & 0 \\ a & 0 & a^2 \end{bmatrix},$$

$$[k_{13}^S] = \begin{bmatrix} -1-\alpha^2 & \alpha^2 b & -a \\ -\alpha^2 b & \alpha^2 b^2 & 0 \\ a & 0 & a^2 \end{bmatrix}, \quad [k_{14}^S] = \begin{bmatrix} 1-\alpha^2 & \alpha^2 b & -a \\ -\alpha^2 b & \alpha^2 b^2 & 0 \\ -a & 0 & a^2 \end{bmatrix}.$$

Celelalte submatrici din (10.75) se calculează ca în (10.52).

Expresiile de mai sus sunt prezentate în lucrarea [87].

Vectorul forțelor nodale echivalente este

$$\{f^e\} = \int_A [N]^T \begin{Bmatrix} p_z \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} dA. \quad (10.76)$$

Pentru $p_z = \text{constant}$, înlocuind funcțiile de formă din (10.63) și (10.61) în (10.76) și integrând se obține

$$\{f^e\} = p_z ab [1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0]^T, \quad (10.77)$$

deci la fiecare nod se aplică un sfert din forța totală.

Momentele încovoietoare și de răsucire pe unitatea de lungime sunt date de

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = -\frac{h^3}{12} [I_3] [D] [B^B] \{q^e\}, \quad (10.78)$$

unde $[I_3]$ este definită în (10.53). Valorile cele mai precise se obțin în punctele Gauss utilizând integrarea numerică în (2×2) puncte.

Forțele tăietoare pe unitatea de lungime sunt

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \kappa h [D^S] [B^S] \{q^e\}. \quad (10.79)$$

Valorile cele mai precise se obțin în centrul elementului.

Exemple de simulare numerică au arătat că elementul HTK dă rezultate bune pentru plăci simplu rezemate sau încastrate pe contur. În schimb în cazul plăcilor în consolă pot apare erori mari.

Analiza de mai sus poate fi extinsă la elemente de plăci cu 8 noduri sau de ordin superior. La elementul cu 8 noduri, deformațiile specifice de încovoiere calculate în punctele Gauss prin integrare redusă în (2×2) puncte sunt apropiate de cele adevărate. La plăci foarte subțiri, deformațiile specifice de forfecare devin foarte mici, iar valori apropiate de zero în (10.26) implică o relație de interdependență între w , θ_x și θ_y care nu este adevărată la plăci groase. Acest inconvenient este evitat prin integrare selectivă, micșorând ordinul de integrare în matricea de rigiditate pentru forfecare. Totuși, integrarea standard în (2×2) puncte dă rezultate bune pentru rapoarte lățime/grosime până la 50.

Niciun element dreptunghiular de placă încovoiată nu este perfect. Există formulări diverse care utilizează combinații de grade de libertate la colțuri și la mijlocul laturilor pentru a realiza polinoame aproape complete. Alte metode, care consideră dificilă generarea unei funcții de deplasări valabilă pe tot elementul dreptunghiular, sugerează împărțirea elementului în subdomenii (de ex. în patru triunghiuri) și utilizarea unor funcții de deplasare diferite pe fiecare domeniu. Desigur, funcțiile individuale (și derivatele întâi) trebuie să fie continue la granițele interioare dintre elemente ca și la granițele exterioare.

10.4 Elemente de placă încovoiată triunghiulare

În acest paragraf se prezintă dezvoltarea unor elemente de placă încovoiată triunghiulare.

10.4.1 Element triunghiular subțire (neconform)

În figura 10.6 se arată *elementul T* (Tocher - 1962). Axa locală x este în lungul laturii 1-2 iar axa locală y este perpendiculară pe axa x . Nodurile 1, 2 și 3 au coordonatele $(0,0)$, $(x_2,0)$ și (x_3,y_3) . Fiecare nod are trei grade de libertate, deplasarea transversală w , și cele două rotații $\theta_x = \frac{\partial w}{\partial y}$ și $\theta_y = -\frac{\partial w}{\partial x}$ față de axele locale.

Deoarece elementul are 9 grade de libertate, funcția deplasărilor poate fi aproximată printr-un polinom cu nouă termeni

$$w = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 (x^2 y + xy^2) + \alpha_9 y^3. \quad (10.80)$$

De observat că un polinom de gradul trei are zece termeni, deci polinomul (10.80) este incomplet. Pentru a menține simetria, coeficienții termenilor în $x^2 y$ și xy^2 sunt luați egali.

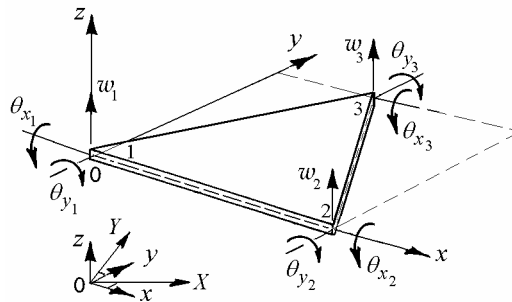


Fig. 10.6

Expresia (10.80) poate fi scrisă matricial sub forma

$$w = [1 \quad x \quad y \quad x^2 \quad xy \quad y^2 \quad x^3 \quad (x^2 y + xy^2) \quad y^3] \{\alpha\}, \quad (10.81)$$

$$w = [P(x, y)] \{\alpha\}, \quad (10.81, a)$$

unde

$$\{\alpha\}^T = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \dots \quad \alpha_9]. \quad (10.82)$$

Derivând (10.81) se obține

$$\begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & x^3 & x^2y + xy^2 & y^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x & 2y & 0 & x^2 + 2xy & 3y^2 \\ 0 & -1 & 0 & -2x & -y & 0 & -3x^2 & -2xy - y^2 & 0 \end{bmatrix} \{ \alpha \}. \quad (10.83)$$

Evaluând (10.83) în punctele nodale rezultă

$$\{ q^e \} = [A^e] \{ \alpha \}, \quad (10.84)$$

unde

$$\{ q^e \}^T = [w_1 \quad \theta_{x1} \quad \theta_{y1} \quad \dots \quad w_3 \quad \theta_{x3} \quad \theta_{y3}], \quad (10.85)$$

și matricea

$$[A^e] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_2 & 0 & x_2^2 & 0 & 0 & x_2^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_2 & 0 & 0 & x_2^2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2x_2 & 0 & 0 & 3x_2^2 & 0 & 0 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & x_3^3 & x_3^2y_3 + x_3y_3^2 & y_3^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_3 & 2y_3 & 0 & x_3^2 + 2x_3y_3 & 3y_3^2 \\ 0 & -1 & 0 & -2x_3 & -y_3 & 0 & -3x_3^2 & -2x_3y_3 - y_3^2 & 0 \end{bmatrix}. \quad (10.86)$$

Rezolvând (10.84) în funcție de $\{ \alpha \}$ se obține

$$\{ \alpha \} = [A^e]^{-1} \{ q^e \}. \quad (10.87)$$

Înlocuind (10.87) în (10.81, a) rezultă

$$w = [P(x, y)] [A^e]^{-1} \{ q^e \}. \quad (10.88)$$

Din păcate, matricea $[A^e]$ este singulară ori de câte ori

$$x_2 - 2x_3 - y_3 = 0 \quad (10.89)$$

și deci nu poate fi inversată. În aceste cazuri, trebuie modificată poziția nodurilor pentru a evita această condiție.

Elementul este incompatibil. Evaluând (10.83) pe latura 1-2, de ecuație $y = 0$, se obține

$$\begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix}_{1-2} = \begin{bmatrix} 1 & x & 0 & x^2 & 0 & 0 & x^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x & 0 & 0 & x^2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2x & 0 & 0 & -3x^2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \{ \alpha \}. \quad (10.90)$$

Rotirea θ_x este o funcție de gradul doi cu coeficienții α_3 , α_5 și α_8 . Aceștia nu pot fi determinați exclusiv pe baza valorilor lui θ_x la nodurile 1 și 2. Prin urmare, panta normalei nu este continuă între elemente. În plus, funcția (10.80) nu este invariantă în raport cu alegerea axelor de coordonate, datorită termenilor x^2y și xy^2 .

Latura 1-2 a fost aleasă în lungul axei x . În acest caz θ_x este o componentă tangențială și θ_y este o componentă normală a rotirii. Deplasarea transversală w și componenta normală θ_y sunt continue între elemente, în timp ce componenta tangențială θ_x nu este. Pentru a evita aceasta, în unele elemente de placă încovoiată se adoptă o variație liniară a componentei tangențiale.

Înlocuind (10.88) în (10.4) și (10.8) se obține

$$U_e = \frac{1}{2} \{ q^e \}^T [\bar{k}^e] \{ q^e \} \quad (10.91)$$

unde matricea de rigiditate a elementului în sistemul de coordonate locale este

$$[\bar{k}^e] = [A^e]^{-T} \int_A \frac{h^3}{12} [\bar{B}]^T [D] [\bar{B}] dA [A^e]^{-1} \quad (10.92)$$

iar matricea $[\bar{B}]$ este

$$[\bar{B}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 6x & 2y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2x & 6y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4(x+y) & 0 \end{bmatrix}. \quad (10.93)$$

Un termen tipic al integrandului din (10.92) are forma $\int_A x^m y^n dA$, care poate fi calculată analitic.

Vectorul forțelor nodale coerente este dat de

$$\{ \bar{f}^e \} = [A^e]^{-T} \int_A [P]^T p_z dA. \quad (10.94)$$

Coordonatele nodale sunt de obicei date în sistemul de referință global. Calculul matricii de rigiditate a elementului față de axele locale necesită

coordonatele locale ale nodurilor 2 și 3. Acestea pot fi obținute din coordonatele globale utilizând matricea de transformare corespunzătoare.

Pentru asamblarea matricii de rigiditate globale, matricile elementelor trebuie întâi transformate din axele locale în axele globale printr-un produs matricial triplu, unul dintre procedeele care necesită o durată mare de calcul.

10.4.2 Elementul THT (conform)

Se consideră un element triunghiular gros (*elementul THT* – Henschel, Tocher, 1969) raportat la un sistem de coordonate global. Nodurile 1, 2 și 3 au coordonatele de arie ζ_1 , ζ_2 și ζ_3 (8.35). Fiecare nod are trei grade de libertate independente, și anume, deplasarea transversală w și cele două rotații θ_X și θ_Y în raport cu axele globale.

Funcțiile de aproximare a deplasărilor se aleg de forma

$$w = \sum_{i=1}^3 \zeta_i w_i, \quad \theta_X = \sum_{i=1}^3 \zeta_i \theta_{X_i}, \quad \theta_Y = \sum_{i=1}^3 \zeta_i \theta_{Y_i}, \quad (10.95)$$

unde w_i , θ_{X_i} și θ_{Y_i} sunt gradele de libertate la nodul i . În acest fel w , θ_X și θ_Y sunt continue între elemente.

În formă matricială, expresiile (10.95) se scriu

$$\begin{Bmatrix} w \\ \theta_X \\ \theta_Y \end{Bmatrix} = [N] \{ q^e \}, \quad (10.96)$$

unde vectorul deplasărilor nodale este

$$\{ q^e \}^T = [w_1 \quad \theta_{X1} \quad \theta_{Y1} \quad \cdots \quad w_3 \quad \theta_{X3} \quad \theta_{Y3}], \quad (10.97)$$

și matricea funcțiilor de formă

$$[N] = \begin{bmatrix} \zeta_1 & 0 & 0 & \zeta_2 & 0 & 0 & \zeta_3 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta_1 & 0 & 0 & \zeta_2 & 0 & 0 & \zeta_3 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta_1 & 0 & 0 & \zeta_2 & 0 & 0 & \zeta_3 \end{bmatrix}. \quad (10.98)$$

Funcțiile exprimate prin coordonatele de arie pot fi derivate în raport cu coordonatele carteziane utilizând relațiile

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{2A} \sum_{i=1}^3 \beta_i \frac{\partial}{\partial \zeta_i}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{2A} \sum_{i=1}^3 \gamma_i \frac{\partial}{\partial \zeta_i}, \quad (10.99)$$

unde β_i și γ_i sunt definite în (8.8).

Înlocuind (10.96) în (10.24) și utilizând (10.99) se obține matricea de legătură între deformații specifice și deplasări pentru încovoiere

$$[B^B] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\beta_1 & 0 & 0 & -\beta_2 & 0 & 0 & -\beta_3 \\ 0 & \gamma_1 & 0 & 0 & \gamma_2 & 0 & 0 & \gamma_3 & 0 \\ 0 & \beta_1 & -\gamma_1 & 0 & \beta_2 & -\gamma_2 & 0 & \beta_3 & -\gamma_3 \end{bmatrix}. \quad (10.100)$$

Cum această matrice este constantă, matricea de rigiditate pentru încovoiere are expresia

$$[k^B] = \frac{h^3}{12} A [B^B]^T [D] [B^B]. \quad (10.101)$$

Înlocuind (10.96) în (10.24) și utilizând (10.99) se obține matricea de legătură între deformații specifice și deplasări pentru forfecare

$$[B^S] = \begin{bmatrix} \frac{\beta_1}{2A} & 0 & \zeta_1 & \frac{\beta_2}{2A} & 0 & \zeta_2 & \frac{\beta_3}{2A} & 0 & \zeta_3 \\ \frac{\gamma_1}{2A} & -\zeta_1 & 0 & \frac{\gamma_2}{2A} & -\zeta_2 & 0 & \frac{\gamma_3}{2A} & -\zeta_3 & 0 \end{bmatrix}. \quad (10.102)$$

Înlocuind (10.102) în (10.67) și integrând cu formula generală

$$\int_A \zeta_1^m \zeta_2^n \zeta_3^p dA = \frac{m!n!p!}{(m+n+p+2)!} 2A \quad (10.103)$$

se obține matricea de rigiditate pentru forfecare

$$[k^S] = \kappa G h \begin{bmatrix} [k_{11}^S] & [k_{12}^S] & [k_{13}^S] \\ \text{sim} & [k_{22}^S] & [k_{23}^S] \\ & & [k_{33}^S] \end{bmatrix}, \quad (10.104)$$

în care

$$[k_{11}^S] = \begin{bmatrix} \frac{\beta_1^2 + \gamma_1^2}{4A} & -\frac{\gamma_1}{6} & \frac{\beta_1}{6} \\ -\frac{\gamma_1}{6} & \frac{A}{6} & 0 \\ \frac{\beta_1}{6} & 0 & \frac{A}{6} \end{bmatrix}, \quad [k_{12}^S] = \begin{bmatrix} \frac{\beta_2 \beta_1 + \gamma_2 \gamma_1}{4A} & -\frac{\gamma_1}{6} & \frac{\beta_1}{6} \\ -\frac{\gamma_2}{6} & \frac{A}{12} & 0 \\ \frac{\beta_2}{6} & 0 & \frac{A}{12} \end{bmatrix},$$

$$[k_{13}^S] = \begin{bmatrix} \frac{\beta_3 \beta_1 + \gamma_3 \gamma_1}{4A} & -\frac{\gamma_1}{6} & \frac{\beta_1}{6} \\ -\frac{\gamma_3}{6} & \frac{A}{12} & 0 \\ \frac{\beta_3}{6} & 0 & \frac{A}{12} \end{bmatrix}, \quad [k_{22}^S] = \begin{bmatrix} \frac{\beta_2^2 + \gamma_2^2}{4A} & -\frac{\gamma_2}{6} & \frac{\beta_2}{6} \\ -\frac{\gamma_2}{6} & \frac{A}{6} & 0 \\ \frac{\beta_2}{6} & 0 & \frac{A}{6} \end{bmatrix},$$

$$[k_{23}^S] = \begin{bmatrix} \frac{\beta_3 \beta_2 + \gamma_3 \gamma_2}{4A} & -\frac{\gamma_2}{6} & \frac{\beta_2}{6} \\ -\frac{\gamma_3}{6} & \frac{A}{12} & 0 \\ \frac{\beta_3}{6} & 0 & \frac{A}{12} \end{bmatrix}, \quad [k_{33}^S] = \begin{bmatrix} \frac{\beta_3^2 + \gamma_3^2}{4A} & -\frac{\gamma_3}{6} & \frac{\beta_3}{6} \\ -\frac{\gamma_3}{6} & \frac{A}{6} & 0 \\ \frac{\beta_3}{6} & 0 & \frac{A}{6} \end{bmatrix}.$$

Matricea de rigiditate completă a elementului este dată de suma (10.65).

Relațiile de mai sus sunt prezentate în lucrarea [87].

Pentru $p_z = \text{constant}$, înlocuind funcțiile de formă din (10.98) în (10.76) și integrând se obține vectorul forțelor nodale echivalente

$$\{f^e\} = p_z \frac{A}{3} [1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0]^T \quad (10.105)$$

care arată că la fiecare nod se aplică o treime din forța totală.

10.4.3 Triunghiuri cu constrângeri Kirchhoff discrete (DKT)

Dificultățile întâlnite în formularea unor elemente simple (cu număr minim de grade de libertate) și performante, bazate pe teoria lui Kirchhoff ‘continuă’ (care implică o continuitate de tip C^1 pentru w), au condus la metoda Kirchhoff ‘discretă’ (DK), în care anumite condiții (constrângeri) se impun local (Wempner-1969, Stricklin *et al.*-1969, Dhatt-1967).

În formularea diferitelor elemente de placă DK se consideră numai energia de deformație la încovoiere, în care curburile sunt exprimate, ca și în teoria Reissner-Mindlin, în funcție de derivatele întâi ale rotirilor (10.24). În acest caz se pot considera doar aproximații cu continuitate C^0 ale acestor rotiri. Energia de deformație la forfecare este neglijată.

Constrângerile Kirchhoff se aplică în mod *discret* pe laturile elementului și/sau în interior. De exemplu, lunecările specifice transversale sunt fie considerate zero în mijlocul laturilor (colocație pe laturi) fie integrala acestora în lungul fiecărei laturi este considerată zero. Se urmărește să se păstreze continuitatea C^0 a componentelor tangențiale ale rotirilor (pantele normalelor). Pentru a verifica validitatea elementelor sunt necesare ‘teste ale peticului’ pentru grupuri de elemente cu curbă constantă.

Elementul T prezentat în paragraful 10.4.1 poate fi numit un triunghi Kirchhoff ‘continuu’. În lungul unei laturi, rotirile variază parabolic și componenta lor tangențială (panta normalei) nu este continuă la granița dintre elemente.

Pentru a remedia aceasta, în triunghiurile Kirchhoff ‘discrete’ cele două componente ale rotirilor sunt considerate independente una de cealaltă. Componenta tangențială θ_s se presupune că variază liniar în lungul fiecărei laturi, în timp ce componenta normală θ_n variază parabolic (fig. 10.7, a). A doua condiție implică o variație de gradul trei a deplasării transversale w .

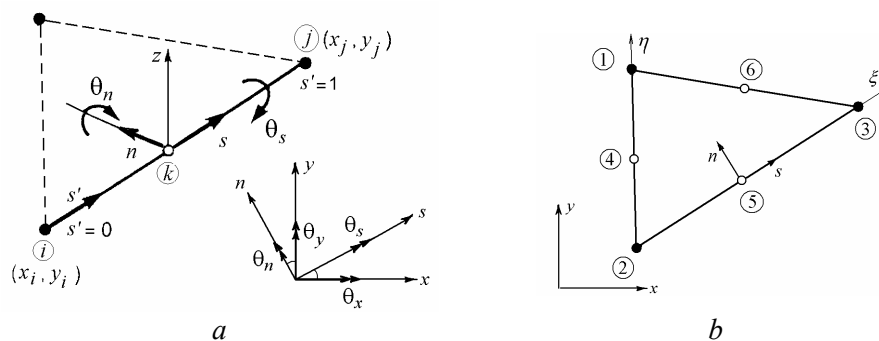


Fig. 10.7

Pentru o latură $i - j$, de lungime ℓ_k , componentele tangențiale și normale ale rotirilor θ_{sk} și θ_{nk} în nodul k din mijlocul laturii, se definesc în funcție de componentele în lungul axelor de coordonate prin relațiile

$$\begin{Bmatrix} \theta_{sk} \\ \theta_{nk} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_k & s_k \\ -s_k & c_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{xk} \\ \theta_{yk} \end{Bmatrix} \quad (10.106)$$

în care

$$c_k = (x_j - x_i) / \ell_k, \quad s_k = (y_j - y_i) / \ell_k. \quad (10.107)$$

Se consideră un *triunghi Kirchhoff 'discret'* (DKT) cu trei noduri și trei grade de libertate pe nod (uneori denumit DKT9).

Inițial se presupune că are șase noduri (fig. 10.7, b), apoi se elimină gradele de libertate de la mijlocul laturilor.

Rotirea θ_n variază parabolic (fig. 10.8, a). Expresia acesteia în funcție de coordonata adimensională

$$s' = s / \ell_k$$

se poate scrie sub forma

$$\theta_n = (1 - s')\theta_{ni} + s'\theta_{nj} + 4s'(1 - s')\alpha_k.$$

În nodul k de la mijlocul laturii rotirea este

$$\theta_{nk} = \frac{1}{2} (\theta_{ni} + \theta_{nj}) + \alpha_k,$$

unde primul termen din membrul drept este exprimat în funcție de rotirile în nodurile de la vârfuri. Parametrul α_k trebuie eliminat.

Se presupune că rotirea θ_s variază liniar (fig. 10.8, b)

$$\theta_s = (1 - s')\theta_{si} + s'\theta_{sj}.$$

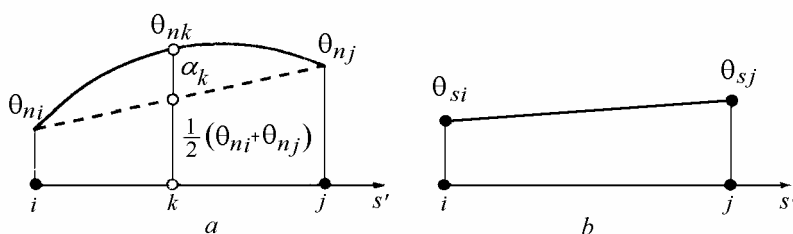


Fig. 10.8

Pentru a elimina gradele de libertate ale nodurilor de la mijlocul laturilor, cei trei parametri $\alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$ trebuie exprimați în funcție de gradele de libertate ale nodurilor de la vârfuri. Aceasta se realizează impunând anularea unghiurilor de deformație specifică γ_{sz} în lungul fiecărei laturi. Un tip de constrângere Kirchhoff 'discretă' este formulată în formă integrală astfel

$$\int_i^j \gamma_{sz} ds = \int_i^j \left(\frac{\partial w}{\partial s} + \theta_n \right) ds = 0. \quad (10.108)$$

Relația (10.108) poate fi scrisă

$$\int_i^j dw + \int_0^{\ell_k} \theta_n ds = 0,$$

$$(w_j - w_i) + \ell_k \int_0^1 [(1-s')\theta_{ni} + s'\theta_{nj} + 4s'(1-s')\alpha_k] ds' = 0,$$

de unde se obține

$$\alpha_k = \frac{3}{2\ell_k} (w_i - w_j) - \frac{3}{4} (\theta_{ni} + \theta_{nj}),$$

sau, în funcție de gradele de libertate ale nodurilor din vârfuri

$$\alpha_k = \frac{3}{2\ell_k} (w_i - w_j) - \frac{3}{4} (-s_k \theta_{xi} + c_k \theta_{yi} - s_k \theta_{xj} + c_k \theta_{yj}). \quad (10.109)$$

Expresia (10.109) mai poate fi obținută exprimând $w(s)$ printr-un polinom de tip Hermite de gradul trei și utilizând constrângerea Kirchhoff discretă $\gamma_{sz} = \frac{\partial w}{\partial s} + \theta_n = 0$ (lunecare specifică zero) în punctele i, j, k . Apoi, condiția $\gamma_{sz} = 0$ va fi satisfăcută în toate punctele în lungul conturului, deoarece w este de gradul trei și θ_n este de gradul doi.

Rotirile θ_x și θ_y pot fi exprimate sub forma

$$\begin{aligned} \theta_x &= [N] \{ \theta_x \} + [P_x] \{ \alpha \}, \\ \theta_y &= [N] \{ \theta_y \} + [P_y] \{ \alpha \}, \end{aligned} \quad (10.110)$$

unde

$$\begin{aligned} [N] &= [N_1 \quad N_2 \quad N_3] = [1 - \xi - \eta \quad \xi \quad \eta], \\ \{ \theta_x \} &= [\theta_{x1} \quad \theta_{x2} \quad \theta_{x3}]^T, \quad \{ \theta_y \} = [\theta_{y1} \quad \theta_{y2} \quad \theta_{y3}]^T, \\ \{ \alpha \} &= [\alpha_4 \quad \alpha_5 \quad \alpha_6]^T, \\ [P_x] &= [-P_4 s_4 \quad -P_5 s_5 \quad -P_6 s_6], \quad [P_y] = [P_4 c_4 \quad P_5 c_5 \quad P_6 c_6], \\ [P_4 \quad P_5 \quad P_6] &= [4\xi(1-\xi-\eta) \quad 4\xi\eta \quad 4\eta(1-\xi-\eta)]. \end{aligned} \quad (10.111)$$

Înlocuind (10.109) în (10.110) se obțin expresiile explicite ale rotirilor θ_x și θ_y în funcție de variabilele nodale de la vârfuri

$$\begin{Bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = [N] \{q^e\}, \quad (10.112)$$

unde

$$\{q^e\}^T = [w_1 \ \theta_{x1} \ \theta_{y1} \ \dots \ w_3 \ \theta_{x3} \ \theta_{y3}], \quad (10.113)$$

$$[N] = \begin{bmatrix} [N_1^x] & [N_2^x] & [N_3^x] \\ [N_1^y] & [N_2^y] & [N_3^y] \end{bmatrix}, \quad (10.114)$$

$$[N_1^x] = [N_{i1}^x \ N_{i2}^x \ N_{i3}^x], \quad [N_1^y] = [N_{i1}^y \ N_{i2}^y \ N_{i3}^y]. \quad (10.115)$$

În (10.115), funcțiile de formă au următoarele expresii

$$\begin{aligned} N_{i1}^x &= -\frac{3}{2\ell_k} P_k s_k + \frac{3}{2\ell_m} P_m s_m, & N_{i1}^y &= \frac{3}{2\ell_k} P_k c_k - \frac{3}{2\ell_m} P_m c_m, \\ N_{i2}^x &= N_i - \frac{3}{4} P_k s_k^2 - \frac{3}{4} P_m s_m^2, & N_{i2}^y &= N_{i3}^x, \\ N_{i3}^x &= \frac{3}{4} P_k s_k c_k + \frac{3}{4} P_m s_m c_m, & N_{i3}^y &= N_i - \frac{3}{4} P_k c_k^2 - \frac{3}{4} P_m c_m^2. \end{aligned} \quad (10.116)$$

În expresiile de mai sus indicii k și m se referă la cele două laturi care au vârf comun punctul i , după cum se arată în Tabelul 10.1.

Luând în considerație ipotezele adoptate în formularea elementului DKT, rotirile nodale θ_{xi} și θ_{yi} au expresiile folosite în teoria lui Kirchhoff

$$\theta_{xi} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_i, \quad \theta_{yi} = - \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_i, \quad (i=1,2,3)$$

permițând introducerea condițiilor la limită de tip Kirchhoff.

Tabelul 10.1

Colțul, i	Latura k ($i-j$)	Latura m ($i-j$)
1	4 (1-2)	6 (3-1)
2	5 (2-3)	4 (1-2)
3	6 (3-1)	5 (2-3)

Deoarece parametrii α_k sunt eliminați utilizând o expresie care este o funcție de variabilele nodale exclusiv de pe latura k , se menține continuitatea C^0 a rotirii θ_n .

Matricea de rigiditate a elementului DKT poate fi exprimată în formă explicită, într-un sistem local de coordonate [18], utilizând regula de integrare Hammer. În continuare, aceasta va fi calculată în coordonate globale ca în [68].

Din ecuația (10.112) pot fi separate funcțiile de aproximare ale rotirilor

$$\theta_x = [\bar{G}] \{q^e\}, \quad \theta_y = [\bar{H}] \{q^e\}. \quad (10.117)$$

Vectorii linie ai funcțiilor de formă $[\bar{G}]$ și $[\bar{H}]$, exprimați explicit în funcție de coordonatele oblice locale ξ și η , se pot scrie sub forma

$$\begin{aligned} [\bar{G}] &= \begin{bmatrix} 1 & \xi & \eta & \xi^2 & \xi\eta & \eta^2 \end{bmatrix} [G], \\ [\bar{H}] &= \begin{bmatrix} 1 & \xi & \eta & \xi^2 & \xi\eta & \eta^2 \end{bmatrix} [H]. \end{aligned} \quad (10.118)$$

Vectorul curburilor (10.24) se scrie

$$\{\chi\} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial\theta_y}{\partial x} & \frac{\partial\theta_x}{\partial y} & \frac{\partial\theta_x}{\partial x} - \frac{\partial\theta_y}{\partial y} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \chi_1 & \chi_2 & \chi_{12} \end{bmatrix}^T. \quad (10.119)$$

Elementele vectorului curburilor pot fi exprimate în funcție de liniile matricilor $[G]$ și $[H]$ de dimensiuni (6×9) după cum urmează

$$\begin{aligned} \chi_1 &= \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} 1 & \xi & \eta \end{bmatrix} \{X\} \{q^e\}, \\ \chi_2 &= \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} 1 & \xi & \eta \end{bmatrix} \{Y\} \{q^e\}, \\ \chi_{12} &= \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} 1 & \xi & \eta \end{bmatrix} \{Z\} \{q^e\}, \end{aligned} \quad (10.120)$$

unde A este aria triunghiului cu vârfurile (x_1, y_1) , (x_2, y_2) și (x_3, y_3) .

În (10.120)

$$\{X\} = \begin{Bmatrix} \beta_2 [G]_2 + \beta_3 [G]_3 \\ 2\beta_2 [G]_4 + \beta_3 [G]_5 \\ \beta_2 [G]_5 + 2\beta_3 [G]_6 \end{Bmatrix}, \quad \{Y\} = \begin{Bmatrix} \gamma_2 [H]_2 + \gamma_3 [H]_3 \\ 2\gamma_2 [H]_4 + \gamma_3 [H]_5 \\ \gamma_2 [H]_5 + 2\gamma_3 [H]_6 \end{Bmatrix},$$

$$\{Z\} = \begin{Bmatrix} \gamma_2 [G]_2 + \gamma_3 [G]_3 + \beta_2 [H]_2 + \beta_3 [H]_3 \\ 2\gamma_2 [G]_4 + \gamma_3 [G]_5 + 2\beta_2 [H]_4 + \beta_3 [H]_5 \\ \gamma_2 [G]_5 + 2\gamma_3 [G]_6 + \beta_2 [H]_5 + 2\beta_3 [H]_6 \end{Bmatrix}, \quad (10.121)$$

unde $[G]_i$ și $[H]_i$ reprezintă liniile i din $[G]$ și $[H]$, iar $\beta_i = y_j - y_k$ și $\gamma_i = x_k - x_j$ sunt date de (8.8), cu i, j, k având valorile 1, 2, 3 prin permutări circulare.

Înlocuind curburile în expresia energiei de deformație la încovoiere

$$U_e = \frac{1}{2} \int_A \{\chi\}^T [\bar{D}] \{\chi\} dx dy, \quad (10.122)$$

în care matricea $[\bar{D}]$ are forma (10.13), U_e se poate scrie

$$U_e = \frac{1}{2} \{q^e\}^T [K^e] \{q^e\},$$

unde $[K^e]$ este matricea de rigiditate a elementului în coordonate globale, dată de

$$[K^e] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} [X] \\ [Y] \\ [Z] \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \bar{D}_{11} [R] & \bar{D}_{12} [R] & \bar{D}_{16} [R] \\ \text{sim} & \bar{D}_{22} [R] & \bar{D}_{26} [R] \\ & & \bar{D}_{66} [R] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [X] \\ [Y] \\ [Z] \end{bmatrix}, \quad (10.123)$$

în care

$$[R] = \frac{1}{24} \begin{bmatrix} 12 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (10.124)$$

Matricea $[K^e]$ are rang 6, deci există 3 moduri de deformare cu energie de deformație nulă.

Integralele din (10.122) au forma

$$\int_0^\xi \int_0^{1-\xi} \xi^m \eta^n d\xi d\eta = \frac{m! n!}{(m+n+2)!}.$$

Procedura prezentată evită produsele matriciale triple ce apar atunci când matricea de rigiditate a elementului este dată în sistemul de coordonate local.

Bibliografie

1. * * * *A Finite Element Primer*, National Engineering Laboratory, Glasgow, 1986.
2. * * * *ANSYS User's Manual for Revision 5.0*, Swanson Analysis Systems Inc., Houston, Pa, 1992.
3. * * * , *Author Index of Finite Element Books*, Linköping Universiteit, <http://ohio.ikp.liu.se/fe/auth.html>.
4. * * * *Guide de validation des progiciels de calcul de structures*, Société Française des Mécaniciens, Afnor, Paris, 1990.
5. * * * *The Standard NAFEMS Benchmarks*, National Agency for Finite Element Methods and Standards, Glasgow, 1989.
6. Adini, A. and Clough, R. W., Analysis of plate bending by the finite element method, *Report G7337 to Nat. Sci. Found. U.S.A.*, 1961.
7. Akin, J. E., *Finite Element Analysis with Error Estimators*, Butterworth Heinemann, Amsterdam, 2005.
8. Argyris, J. H., Energy theorems and structural analysis, *Aircraft Engineering*, **26**, Oct.-Nov. 1954; **27**, Feb.-May 1955.
9. Argyris, J. H. and Kelsey, S., *Energy Theorems and Structural Analysis*, Butterworth, London, 1960.
10. Argyris, J. H., Continua and discontinua, *Proc. 1st Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics*, Report AFFDL-TR-66-80, Air Force Institute of Technology, Dayton, Ohio, 10-170, 1965.
11. Argyris, J. and Mlejnek, H.-P., *Die Methode der finiten Elemente*, 3 vol., Vieweg, Braunschweig, 1986, 1987, 1988.
12. Archer, J. S., Consistent mass matrix for distributed mass systems, *J. Str. Div. Proc. ASCE*, **89**, ST4, 161-178, 1963.
13. Archer, J. S., Consistent mass matrix formulation for structural analysis using finite element techniques, *AIAA J.*, **3**, 1910-1918, 1965.
14. Babuska I. and Strouboulis, T., *The Finite Element Method and Its Reliability*, Oxford University Press, Oxford, 2001.
15. Barlow, J., Optimal stress locations in finite element models, *Int. J. Num. Meth. Engrg.*, **10**, 243-251, 1976.

16. Bathe, K.-J., *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1982.
17. Bathe, K.-J. and Wilson, E. L., *Numerical Methods in Finite Element Analysis*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1976.
18. Batoz, J. L., Bathe, K.-J. and Ho, L. W., A study of three-node triangular plate bending elements, *Int. J. Num. Meth. Engrg.*, **15**, 1771-1812, 1980.
19. Batoz, J. L. and Dhatt, G., *Modelisation des structures par éléments finis*, 3 vol., Hermes, Paris, 1990, 1992.
20. Belytschko, T. and Hughes T. J. R. (eds.), *Computational Methods for Transient Analysis*, North-Holland, Amsterdam, 1983.
21. Blumenfeld, M., *Introducere în metoda elementelor finite*, Editura tehnică, București, 1995.
22. Blumenfeld, M., Ioniță, A. și Mareș, C., *Metoda elementelor finite – aplicații și programe introductive*, U.P.B., 1992.
23. Bogner, F. K., Fox, R. L. and Schmit, L. A., The generation of interelement compatible stiffness and mass matrices by the use of interpolation formulas, *Proc. 1st Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics*, Air Force Institute of Technology, Report AFFDL TR 66-80, Dayton, Ohio, Nov. 1965.
24. Brebbia, C. A. and Connor, J. J., *Fundamentals of Finite Element Techniques*, Butterworths, London, 1973.
25. Brown, D. K., *An Introduction to the Finite Element Method Using BASIC Programs*, Surrey University Press, Glasgow, 1984.
26. Buchanan, G. R., *Schaum's Outline of Theory and Problems of Finite Element Analysis*, Schaum, New York, 1995.
27. Buell, W. R. and Bush, B. A., Mesh generation - A survey, *J. Eng. Industry, Trans. ASME, Series B*, **95**, 332-338, 1973.
28. Castigliano, A., Nuova teoria intorno all'equilibrio dei sistemi elastici, *Trans. Acad. Sci.*, Torino, 1876.
29. Chandrupatla, T. R. and Belegundu, A. D., *Intoduction to Finite Elements in Engineering*, Prentice Hall International, London, 1991.
30. Cheung, Y. K. and Yeo, M. F., *A Practical Introduction to Finite Element Analysis*, Pitman, London, 1979.
31. Clough, R. W., The finite element method in plane stress analysis, *Proc 2nd ASCE Conf. on Electronic Computation*, Pittsburgh, Pa, 1960.
32. Clough, R. W., The finite element method after twenty-five years: a personal view, *Computers and Structures*, **12**, 361-370, 1980.

33. Cook, R. D., Malkus, D. S. and Plesha, M. E., *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, 3rd ed., Wiley, New York, 1989, 2001 (1st ed. 1974).
34. Cook, R. D., *Finite Element Modeling for Stress Analysis*, Wiley, New York, 1995.
35. Courant, R., Variational methods for the solution of problems in equilibrium and vibrations, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **49**, 1-23, 1943.
36. Crisfield, M. A., *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*, vol.1, 2, Wiley, Chichester, 1991, 1997.
37. Cuteanu, E. și Marinov, R., *Metoda elementelor finite în proiectarea structurilor*, Editura Facla, Timișoara, 1980.
38. Desai, C. S. and Abel, J. F., *Introduction to the Finite Element Method*, Van Nostrand Reinhold, New York, 1972.
39. Dhatt, G. and Touzot, G., *Une présentation de la méthode des éléments finis*, 2e éd., Maloine, Paris, 1984.
40. Easley, J. G., *Mechanics of Elastic Structures*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1989.
41. Ergatoudis, I., Irons, B. M. and Zienkiewicz, O. C., Curved isoparametric 'quadrilateral' elements for finite element analysis, *Int. J. Solids Struct.*, **4**, 31-42, 1968.
42. Felippa, C. A., Solution of equations with skyline-stored symmetric coefficient matrix, *Computers & Structures*, **5**, 13-25, 1975.
43. Felippa, C. A., web-posted Lectures in *Introductory Finite Element Methods*, at <http://caswww.colorado.edu/courses.d/IFEM.d/Home.html>.
44. Fraeijs de Veubeke, B. M., Displacement and equilibrium models, in *Stress Analysis*, ed. by O. C. Zienkiewicz and G. Hollister, Wiley, London, 145-197, 1965.
45. Fraeijs de Veubeke, B. M., A conforming finite element for plate bending, *Int. J. Solids Struct.*, **4**, 95-108, 1968.
46. Fried, I., Shear in C^0 and C^1 plate bending elements, *Int. J. Solids Struct.*, **9**, 449-460, 1973.
47. Galerkin, B. G., Series solutions of some problems of elastic equilibrium of rods and plates, *Vestnik Injenerov*, Petrograd, 1915 (in Russian).
48. Gallagher, R. H., *Finite Element Analysis-Fundamentals*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1975.
49. Gârbea, D., *Analiza cu elemente finite*, Editura tehnică, București, 1990.
50. Guyan, R. J., Reduction of stiffness and mass matrices, *AIAA J.*, **3**, 380, 1965.

51. Hahn, H. G., *Methode der finiten Elemente in der Festigkeitslehre*, Akademische Verlagsgesellschaft, Frankfurt am Main, 1975.
52. Hinton, E. and Owen, D. R. J., *An Introduction to Finite Element Computation*, Pineridge Press, Swansea, 1979.
53. Hitchings, D. (ed.), *A Finite Element Dynamics Primer*, NAFEMS, Glasgow, 1986.
54. Hrenikoff, A., Solution of problems in elasticity by the framework method, *J. Appl. Mech.*, **8**, 169-175, 1941.
55. Huang, H. C., *Defect-Free Shell Elements*, PhD Thesis, University College of Swansea, 1986.
56. Huang, H. C. and Hinton, E., A nine node Lagrangian Mindlin plate element with enhanced shear interpolation, *Eng. Comput.*, **1**, 369-379, 1984.
57. Huebner, K. H. and Thornton, E. A., *The Finite Element Method for Engineers*, 2nd ed, Wiley-Interscience, New York, 1982.
58. Hughes, T. J. R., *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1987, 2000.
59. Hughes, T. J. R. and Tezduduyar, T. E., Finite elements based upon Mindlin plate theory with particular reference to the four-node bilinear isoparametric element, *J. Appl. Mech.*, **48**, 587-596, 1981.
60. Hughes, T. J. R., Taylor, R. L. and Knoknukulchai, W., A simple and efficient finite element for plate bending, *Int. J. Num. Meth. Engrg.*, **11**, 1529-1543, 1977.
61. Imbert, J. F., *Analyse des structures par elements finis*, 3e éd, Cépaduès-Éditions, Toulouse, 1991.
62. Irons, B. M. and Ahmad, S., *Techniques of Finite Elements*, Ellis Horwood, Chichester, 1978.
63. Irons, B. M., Comments on 'Matrices for the direct stiffness method', by R. J. Melosh, *AIAA J.*, **2**, 403, 1964.
64. Irons, B. M. Engineering application of numerical integration in stiffness methods, *AIAA J.*, **4**, 2035-2037, 1966.
65. Irons, B. M., A frontal solution program for finite element analysis, *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, **2**, 5-32, 1970.
66. Irons, B. M. and Shrive N., *Finite Element Primer*, Wiley, New York, 1983.
67. Irons, B. M. and Zienkiewicz, O. C., The isoparametric finite element system – a new concept in finite element analysis, *Proc. Conf. Recent Advances in Stress Analysis*, Royal Aero. Soc., London, 1968.

68. Jeyachandrabose, C., Kirkhope, J. and Babu, C. R., An alternative explicit formulation for the DKT plate-bending element, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, **21**, 1289-1293, 1985.
69. Kardestuncer, H. and Norrie, D. H. (ed), *Finite Element Handbook*, McGraw-Hill, New York, 1987.
70. Kikuchi, N., *Finite Element Methods in Mechanics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1986.
71. Krishnamoorthy, C. S., *Finite Element Analysis. Theory and Programming*, 2nd ed, Tata McGraw-Hill, New Delhi, 1994 (1st ed 1987).
72. Levy, S., Computation of influence coefficients for aircraft structures with discontinuities and sweptback, *J. Aero. Sci.*, **14**, 547-560, 1947.
73. Levy, S., Structural analysis and influence coefficients for delta wings, *J. Aero. Sci.*, **20**, 677-684, 1953.
74. Link, M., *Finite Elemente in der Statik und Dynamik*, 3.Auflage, Teubner, Stuttgart, 2002.
75. MacNeal, R. H., (ed), *The NASTRAN Theoretical Manual*, NASA SP-221, 1970.
76. MacNeal, R. H., Derivation of element stiffness matrices by assumed strain distributions, *Nucl. Engrg. Design*, **70**, 3-12, 1982.
77. MacNeal, R. H. and Mc Cormick, C. W., The NASTRAN Computer Program for Structural Analysis, *Computers and Structures*, **1**, 389-412, 1971.
78. Martin, H. C. and Carey, G. F., *Introduction to Finite Element Analysis. Theory and Application*, McGraw-Hill, New York, 1972.
79. Maxwell, J. C., On the calculations of the equilibrium and stiffness of frames, *Phil. Mag.*, **27**, 294, 1864.
80. Melosh, R. J., Bases for the derivation of matrices for the direct stiffness method, *AIAA J.*, **1**, 1631-1637, 1963.
81. Moaveni, S., *Finite Element Analysis. Theory and Application with ANSYS*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1999, 2003.
82. Norrie, D. H. and de Vries, G., *An Introduction to the Finite Element Method*, 2nd ed, Academic Press, New York, 1978.
83. Ostenfeld, A., *Die Deformationsmethode*, Springer, Berlin, 1926.
84. Owen D. R. J. and Hinton, E., *A Simple Guide to Finite Elements*, Pineridge Press, Swansea, 1980.
85. Pascariu I., *Elemente finite – Concepte, aplicații*, Editura militară, București, 1985.

86. Paz, M., *Structural Dynamics. Theory and Computation*, Van Nostrand Reinhold, New York, 1980.
87. Petyt, M., *Introduction to Finite Element Vibration Analysis*, Cambridge University Press, 1990.
88. Pian, T. H. H., Derivation of element stiffness matrices, *AIAA J.*, **2**, 576-577, 1964.
89. Przemieniecki, J. S., *Theory of Matrix Structural Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1968.
90. Rao, S. S., *The Finite Element Method in Engineering*, Pergamon Press, Oxford, 1982.
91. Reddy, J. N., *An Introduction to the Finite Element Method*, McGraw-Hill International Student Edition, New York, 1984.
92. Ritz, W., Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik, *J. reine angew. Math.*, **35**, 1-61, 1908.
93. Ross, C. T. F., *Computational Methods in Structural and Continuum Mechanics*, Ellis Horwood, Chichester, 1982.
94. Rossmann, H. P., *Finite Elemente in der Bruchmechanik*, Springer, Berlin, 1982.
95. Schwarz, H. R., *Methode der finiten Elemente*, Teubner, Stuttgart, 1980.
96. Shames, I. H. and Dym, C. L., *Energy and Finite Element Methods in Structural Mechanics*, Taylor & Francis, Levittown, Pa, 1985.
97. Smith, I. M. and Griffiths, V., *Programming the Finite Element Method*, Wiley, New York, 1982, 1988, 1998, 2004.
98. Sorohan, Șt., *Metoda elementelor finite în ingineria mecanică. Programe și aplicații*, vol.1, U. P. B., 1996.
99. Sorohan, Șt. și Constantinescu, I. N., *Practica modelării și analizei cu elemente finite*, Editura Politehnica Press, București, 2003.
100. Stematiu, D., *Calculul structurilor hidrotehnice prin metoda elementelor finite*, Editura tehnică, București, 1988.
101. Strang, G. and Fix, G., *An Analysis of the Finite Element Method*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1973.
102. Szabo, B. and Babuska, I., *Finite Element Analysis*, Wiley, New York, 1991.
103. Taig, I. C. and Kerr, R. I., Some problems in the discrete element representation of aircraft structures, in *Matrix Methods of Structural Analysis*, ed. by B. M. Fraeijs de Veubeke, Pergamon Press, London, 1964.

104. Turner, M. J., The direct stiffness method of structural analysis, *Structural and Materials Panel Paper*, AGARD Meeting, Aachen, 1959.
105. Turner, M. J., Clough, R. W., Martin, H. C. and Topp, L. J., Stiffness and deflection analysis of complex structures, *J. Aero. Sci.*, **23**, 805-824, 1956.
106. Turner, M. J., Martin, H. C. and Weikel, R. C., Further development and applications of the stiffness method, in *Matrix Methods of Structural Analysis*, ed. by B. M. Fraeijs de Veubeke, Pergamon Press, London, 203-266, 1964.
107. Uhrig, R., Zur Berechnung der Steifigkeitsmatrizen des Balkens, *Der Stahlbau*, **4**, 123-125, 1965.
108. Waller, H. and Krings, W., *Matrizenmethoden in der Maschinen- und Bauwerksdynamik*, B.I.-Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1975.
109. Wilson, E. L., *Finite element analysis of two-dimensional structures*, PhD Dissertation, Dept. of Civil Engrg, Univ. of California at Berkeley, 1963.
110. Wilson, E. L., The static condensation algorithm, *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, **8**, 198-203, 1974.
111. Wilson, E. L., Automation of the finite element method - a historical view, *Finite Elements Anal. Des.*, **13**, 91-104, 1993.
112. Zienkiewicz, O., *Introductory Lectures on the Finite Element Method*, CISM Udine Course No. 130, Springer, Wien, 1973.
113. Zienkiewicz, O., Taylor, R. L. and Too, J. M., Reduced integration technique in general analysis of plates and shells, *Int. J. Num. Meth. Engrg.*, **3**, 275-290, 1971.
114. Zienkiewicz, O. C. and Cheung, Y. K., *The Finite Element Method in Engineering Science*, McGraw-Hill, London, 1967, 1968, 1970.
115. Zienkiewicz, O. C. and Taylor, R. L., *The Finite Element Method*, 4th ed, McGraw-Hill, London, vol.1, 1988, vol.2, 1993.
116. Zienkiewicz, O. C., Irons, B. M., Ergatoudis, J., Ahmad, S. and Scott, F. C., Isoparametric and associated element family for two- and three-dimensional analysis, in *Finite Element Methods in Stress Analysis*, eds. I. Holland and K. Bell, Tapir, New York, 1969.
117. Zienkiewicz, O. C. and Phillips, D. V., An automatic mesh generation scheme for plane and curved surfaces by isoparametric coordinates, *Int. J. Num. Meth. Engrg.*, **3**, 519-528, 1971.
118. Zurmühl, R., Ein Matrizenverfahren zur Behandlung von Biegeschwingungen nach der Deformationsmethode, *Ingenieur Archiv*, **22**, 201-213, 1963.

Index

- Aproximare nodală 155
 - polinomială 154
- Aria triunghiului 156
 - de forfecare efectivă 118
- Asamblarea matricilor globale 100, 151
- Bare 47
 - matricea de rigiditate 52
 - vectorul forțelor nodale 55
- Calculul tensiunilor 152
- Compatibilitate 28, 150, 187, 188
 - geometrică 10
- Condiții la limită 12
- Continuitate 132
- Convergență 96, 187, 188
- Coordonate de arie 180
 - naturale 192
- Constrângeri Kirkhhoff discrete 252
- Deplasări virtuale 131
- Discretizarea 149, 153
- Dreptunghiul
 - cu opt noduri 178
 - cu patru noduri 176
- Ecuatii de echilibru 9, 31, 125, 187, 199
- Efecte termice 130
- Efectul pretensionării 59
- Eforturi axiale 97
- Elasticitate liniară 123
- Elemente
 - bidimensionale 153
 - conforme 150, 238, 248
 - de arbore 60
 - de bară 47, 49, 53
 - de cadru plan 97
 - de grindă 83, 107, 118
 - de grindă cu forfecare 116
 - de placă încovoiată ACM 232
 - de placă încovoiată BFS 238
 - de placă încovoiată HTK 239
 - de placă încovoiată THT 248
 - de placă încovoiată 225
 - – dreptunghiulare 232
 - de placă subțire 245
 - – triunghiulare 245
 - de referință 192
 - de membrană 180
 - – cu def. spec. liniare 182
 - – cu def. spec. pătratice 185
 - – cu șase noduri 221
 - dreptunghiulare
 - – cu opt noduri 178
 - – cu patru noduri 176
 - – de membrană 176
 - – de placă subțire 232
 - – de placă Reissner-Mindlin 239
 - izoparametrice 191
 - master 192
 - neconforme 232, 245
 - patrulater liniare 191
 - patrulater cu 8 noduri 208
 - patrulater cu 9 noduri 219
 - patrulater de membrană 191
 - – cu 9 noduri 219
 - – cu 8 noduri 208
 - – liniare 191
 - serendipity 209
 - subparametrice 191
 - triunghiulare
 - – cu def. spec. const. 153
 - – cu def. spec. liniare 182
 - – cu def. spec. pătratice 185
- Energia
 - de deformare 130...139
 - – la forfecare 230
 - – la încovoiere 230
 - potențială
 - – exterioară 140
 - – totală 140
- Etapele A.E.F. 5
- Factorul de forfecare 118, 230
- Formula cu două puncte Gauss 202

- Forțe cinematic echivalente 47
- interioare 35
 - nodale 55
 - – – coerente 214
- Funcții admisibile 144
- de aproximare 149
- Funcții de formă la
- dreptunghiul cu 4 noduri 177
 - dreptunghiul cu 8 noduri 179
 - elementul de bară 48, 50, 53
 - elementul de arbore 62
 - elementul de grindă 85, 107, 120
 - elementul de placă ACM 234
 - elementul de placă BFS 238
 - elementul de placă HTK 240
 - elementul de placă THT 248
 - patrulaterul liniar 193
 - patrulaterul cu opt noduri 209
 - patrulaterul cu nouă noduri 221
 - triunghiul cu def. spec. const. 157
 - triunghiul cu def. spec. liniare 182
 - triunghiul cu def. spec. pătratice 186
 - triunghiul cu șase noduri 221
- Grilaje 111
- Grinzi 79
- cu efecte de forfecare 117
 - fără sarcini între capete 83
 - încărcate între capete 89
- Integrarea numerică 200
- Gauss 200
 - – în două dimensiuni 203
 - – unidimensională 200
 - redusă 205
- Inversa matricii jacobiene 196
- Ipotezele lui Kirchhoff 225
- Încărcare gravitațională 217
- Lucrul mecanic
- exterior 134
 - interior 134
 - virtual 133
 - – al forțelor exterioare 133
 - – al forțelor interioare 133
- Matricea 192
- def. specifice–deplasări 158, 236, 249
 - de rigiditate 17, 151
 - – expandată 29
 - – globală neredusă 30
 - – – redusă 33
 - – la elementul de arbore 61
 - – la elementul de bară 18, 22, 52
 - – la elementul de cadru plan 98
 - – la elementul de grilaj 113
 - – la elementul de grindă 87, 94, 121
 - – la elementul de placă ACM 236
 - – la elementul de placă HTK 242
 - – la elementul de placă T 247
 - – la elementul de placă THT 249
 - – la patrulaterul cu opt noduri 211
 - – la patrulaterul liniar 198
 - – la triunghiul cu def. spec. const. 159
 - – la triunghiul cu def. spec. liniare 183
 - jacobiană 195
- Medierea tensiunilor 161
- Metoda deplasărilor 3
- forțelor 13
 - Rayleigh-Ritz 143
 - rigidității directe 17
- Metode energetice 131
- Modelul lui Link 25
- Numerotarea nodurilor 37
- Obiectul A.E.F. 1
- Patrulaterul
- cu nouă noduri 219
 - cu opt noduri 208
 - cu patru noduri 191
- Polinoame Hermite 85
- Lagrange 220
- Principiul
- deplasărilor virtuale 134, 149
 - lucrului mecanic virtual 131
 - minimului energiei pot. totale 139
- Punctele Gauss 200
- Raportul de formă 178
- Reacțiuni 35
- Relații între def. spec. și deplasări 127
- – tensiuni și deform. specifice 128
- Sarcini termice 36
- Singularitatea matricii jacobiene 223
- Tensiuni termice 36
- Teoria Bernoulli-Euler 81
- plăcilor subțiri 225
 - Reissner-Mindlin 229
- Testul peticului 190

Transformarea

- coordonatelor 19, 98, 195
- forțelor 20
- operatorilor diferențiali 195
- unei arii infinit mici 197

Triunghiul

- cu constr. Kirchhoff discrete 250
- cu deformații specifice constante 153
 - - - liniare 182
 - - - pătratice 185
- cu șase noduri 221
- cu trei noduri 153
- lui Pascal 220
- pătratic 222

Vectorul forțelor nodale 89, 151

- - - echivalente la
 - - - - elementul ACM 237
 - - - - elementul de bară 98
 - - - - elementul de cadru 98
 - - - - elementul de grindă 90, 94
 - - - - elementul T 247
 - - - - elementul THT 250
- - - - patrulaterul liniar 199
- - - - patrulaterul cu 8 noduri 214
- - - - triunghi cu def. spec. const. 160